

Some Fejér type inequalities for strongly $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -convex functions

Nguyen Ngoc Hue*

Department of Natural Science and Technology, Tay Nguyen University, Daklak, Viet Nam

** Corresponding author. Email: nnhue@ttn.edu.vn*

ABSTRACT

In this paper, we introduce and study a class of generalized convex functions, which are defined according to a pair of quasi-arithmetic means and called $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -convex functions, and establish various Fejér type inequalities for such a function class. These inequalities not merely provide a natural and intrinsic characterization of the $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -convex functions, but actually offer a generalization and refinement of some Hermite-Hadamard and Fejér type inequalities obtained in earlier studies for different kinds of strong convexity.

Key words: *Strongly $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -convex functions, Quasi-arithmetic mean, Convexity, Hermite-Hadamard inequality, Fejér inequality.*

Một số bất đẳng thức kiểu Fejér cho hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh

Nguyễn Ngọc Huê*

Khoa Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Đại học Tây Nguyên, Đắk Lắk, Việt Nam

* Tác giả liên hệ chính. Email: nnhue@ttn.edu.vn

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi xem xét một lớp hàm lồi mạnh mở rộng liên quan đến một cặp tựa trung bình số học, được gọi là hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh từ đó thiết lập một số bất đẳng thức kiểu Fejér cho lớp hàm lồi mạnh này. Các bất đẳng thức mới này là sự mở rộng thực sự của các bất đẳng thức Hermite-Hadamard và bất đẳng thức Fejér được thiết lập gần đây đối với hàm lồi mạnh và một số dạng mở rộng của lớp hàm lồi mạnh. Hơn nữa, các bất đẳng thức mới còn đặc trưng cho lớp hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh.

Từ khóa: Hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh, Tựa trung bình số học, Hàm lồi, Bất đẳng thức Hermite-Hadamard, Bất đẳng thức Fejér.

1. GIỚI THIỆU

Bất đẳng thức Hermite-Hadamard được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1883 bởi Hermite⁹ và 10 năm sau bởi Hadamard⁸: Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \quad (1)$$

Dạng có trọng của bất đẳng thức Hermite-Hadamard được đưa ra bởi Fejér⁶: Nếu $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ là hàm khả tích với $\int_a^b g(x)dx > 0$ và đối xứng qua $\frac{a+b}{2}$, tức là $g(x) = g(a+b-x)$ với mọi $x \in [a, b]$, thì

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \quad (2)$$

Trong những năm gần đây, các bất đẳng thức trên đã và đang nhận được sự quan tâm lớn của các nhà toán học nhằm mục đích phát triển và mở rộng theo nhiều hướng khác nhau, cũng như tìm kiếm các ứng dụng của các bất đẳng thức trong lý thuyết hàm lồi, lý thuyết tối ưu. Một trong những hướng phát triển đó là thiết lập các bất đẳng thức mới cho các lớp hàm lồi mở rộng khác nhau (xem^{4,5,12,17}). Một lớp con quan trọng của lớp hàm lồi trong lý thuyết tối ưu được quan tâm đó là lớp hàm lồi mạnh. Lớp hàm này được Polyak¹⁸ đưa ra vào năm 1966 nhằm mục đích giải quyết một số vấn đề liên quan đến một bài toán tối ưu.

Hàm số $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi mạnh với modul c ($c > 0$) nếu

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2$$

với mọi $x, y \in [a, b]$ và $x \leq y$. Ta nói f là hàm lồi mạnh trung điểm với modul c nếu

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - c\frac{(x-y)^2}{4}$$

với mọi $x, y \in [a, b]$ và $x \leq y$.

Năm 2010, Merentes và Nikodem¹⁰ đã thiết lập bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho hàm lồi mạnh như sau: Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi mạnh với modul c , khi đó

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{c}{12}(b-a)^2 &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}(b-a)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Năm 2012, Azocar³ cùng các cộng sự đã đưa ra bất đẳng thức Fejér cho hàm lồi mạnh: Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi mạnh với modul c và $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ là hàm khả tích với $\int_a^b g(x)dx = 1$ và đối xứng qua $\frac{a+b}{2}$, khi đó

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + c \left[\int_a^b x^2 g(x)dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \right] \\ \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \\ \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - c \left[\frac{a^2+b^2}{2} - \int_a^b x^2 g(x)dx \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Trong thời gian gần đây, một số mở rộng của bất đẳng thức (4) cũng đã được đưa ra bằng cách thiết lập bất đẳng thức cho hàm log-lồi mạnh, hàm lồi điều hòa mạnh^{14,16}. Tiếp tục hướng nghiên cứu này, trên cơ sở xây dựng một lớp hàm lồi mạnh mở rộng liên quan đến một cặp trung bình số học, chúng tôi thiết lập một số bất đẳng thức kiểu Fejér cho lớp hàm mới. Những bất đẳng thức mới không chỉ đặc trưng cho lớp các hàm lồi mạnh mở rộng và liên tục mà còn những kết quả mở rộng thực sự của những bất đẳng thức được đưa ra gần đây^{14,16}.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Ký hiệu I và J là các khoảng số thực, $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ và $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm đơn điệu nghiêm ngặt và liên tục. Sử dụng cặp tựa trung bình số học $\mathcal{M}_\phi$ và $\mathcal{M}_\psi$, với $\mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha) = \phi^{-1}(\alpha\phi(a) + (1-\alpha)\phi(b))$ Aumann¹ đã đưa ra khái niệm hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi như sau:

Định nghĩa 1 ⁽¹⁾. Hàm số $f : I \rightarrow J$ được gọi là $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi nếu

$$f(\mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha)) \leq \mathcal{M}_\psi(f(a), f(b); \alpha) \quad (5)$$

với mọi $a, b \in I$ và $\alpha \in [0, 1]$.

Trong trường hợp f thỏa mãn bất đẳng thức (5) với $\phi(x) = x$, ta nói f là $\mathcal{M}_\psi$ -lồi, còn nếu f thỏa mãn bất đẳng thức (5) với $\phi(x) = x$ và $\psi(x) = x$ thì f là hàm lồi.

Với cặp tựa trung bình số học $\mathcal{M}_\phi$ và $\mathcal{M}_\psi$, ta định nghĩa một lớp hàm lồi mạnh mở rộng sau.

Định nghĩa 2. Hàm số $f : I \rightarrow J$ được gọi là $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh với modul c ($c > 0$) nếu:

$$f(\mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha)) \leq \psi^{-1}\left(\alpha\psi \circ f(a) + (1-\alpha)\psi \circ f(b) - c\alpha(1-\alpha)(\phi(a) - \phi(b))^2\right) \quad (6)$$

với mọi $a, b \in I$ và $\alpha \in [0, 1]$. Nếu dấu của bất đẳng thức (6) đổi chiều thì ta nói f là hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh với modul c .

Chú ý, nếu ψ làm hàm tăng thì $f : I \rightarrow J$ là hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh với modul c khi và chỉ khi $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ là hàm lồi mạnh với modul c trên $\phi(I)$. Còn nếu ψ làm hàm giảm thì $f : I \rightarrow J$ là hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh với modul c khi và chỉ khi $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ là hàm lõm mạnh với modul c trên $\phi(I)$.

Ta nói rằng hàm f là $\mathcal{M}_\psi$ -lồi mạnh với modul c nếu f thỏa mãn bất đẳng thức (6) trong trường hợp $\phi(x) = x$. Bằng cách chọn các hàm ϕ và ψ đặc biệt chúng ta có các khái niệm sau:

- Hàm lồi mạnh, nếu ta chọn $\phi(x) = x$ và $\psi(x) = x$:

$$\begin{aligned} f(\alpha a + (1-\alpha)b) \\ \leq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b) - c\alpha(1-\alpha)(a-b)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

với mọi $a, b \in I$ và $\alpha \in [0, 1]$.

- Hàm log-lồi mạnh¹³, nếu ta chọn $\phi(x) = x$ và $\psi(x) = \ln x$:

$$\begin{aligned} \ln f(\alpha a + (1-\alpha)b) \\ \leq \alpha \ln f(a) + (1-\alpha) \ln f(b) - c\alpha(1-\alpha)(a-b)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

với mọi $a, b \in I$ và $\alpha \in [0, 1]$.

- Hàm mũ-lồi mạnh¹⁵, nếu ta chọn $\phi(x) = x$ và hàm $\psi(x) = e^x$:

$$\begin{aligned} e^{f(\alpha a + (1-\alpha)b)} \\ \leq \alpha e^{f(a)} + (1-\alpha)e^{f(b)} - c\alpha(1-\alpha)(a-b)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

với mọi $a, b \in I$ và $\alpha \in [0, 1]$.

- Hàm lồi điều hòa mạnh¹⁴, nếu ta chọn $\phi(x) = 1/x$ và $\psi(x) = x$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{ab}{\alpha a + (1-\alpha)b}\right) \\ \leq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b) - c\alpha(1-\alpha)\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

với mọi $a, b \in I$ và $\alpha \in [0, 1]$.

- Hàm log-lồi điều hòa mạnh¹⁴, nếu ta chọn $\phi(x) = 1/x$ và $\psi(x) = \ln x$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{ab}{\alpha a + (1-\alpha)b}\right) \\ \leq f(a)^\alpha f(b)^{(1-\alpha)} - c\alpha(1-\alpha)\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

với mọi $a, b \in I$ và $\alpha \in [0, 1]$.

- Hàm p -lồi mạnh, nếu $\phi(x) = x^p$ và $\psi(x) = x$.

$$\begin{aligned} f([\alpha a^p + (1-\alpha)b^p]^{1/p}) \\ \leq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b) - c\alpha(1-\alpha)(a^p - b^p)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

với mọi $a, b \in I$ và $\alpha \in [0, 1]$.

- Hàm lồi nhân mạnh, nếu $\phi(x) = \ln x$ và $\psi(x) = \ln x$:

$$f(a^\alpha b^{(1-\alpha)}) \leq f(a)^\alpha f(b)^{(1-\alpha)} - c\alpha(1-\alpha) \ln^2\left(\frac{a}{b}\right) \quad (13)$$

với mọi $a, b \in I$ và $\alpha \in [0, 1]$.

Bổ đề 3 ⁽¹¹⁾. 1. Hàm số $f : I \rightarrow J$ là hàm lồi mạnh với modul c nếu và chỉ nếu $g(x) = f(x) - cx^2$ là hàm lồi.

2. Hàm số $f : I \rightarrow J$ là hàm lồi mạnh trung điểm với modul c nếu và chỉ nếu $g(x) = f(x) - cx^2$ là hàm lồi trung điểm.

Từ Bổ đề trên và tiêu chuẩn Jensen về tính lồi⁷ ta thấy rằng nếu f liên tục trên I và lồi mạnh trung điểm với modul c thì f cũng là hàm lồi mạnh với modul c trên I .

Bổ đề 4. Hàm số f là $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh với modul c nếu và chỉ nếu $g(x) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) - cx^2$ là hàm lồi mạnh trên $\phi(I)$.

Chứng minh. Ta có f là hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh với modul c nếu và chỉ nếu $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ là hàm lồi mạnh với modul c trên $\phi(I)$. Điều này cùng với Bổ đề 3 dẫn đến $f : I \rightarrow J$ là hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh với modul c nếu và chỉ nếu $g(x) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) - cx^2$ là hàm lồi trên $\phi(I)$. $\square$

3. MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC KIỂU FEJÉR CHO HÀM $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -LỒI MẠNH

Trong bài báo này, ta luôn giả thiết $f : I \rightarrow J$ là hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh với modul c ($c > 0$); $a, b \in I$ với $a < b$; $\alpha \in (0, 1)$; $w_1, w_2 : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ là các hàm số khả tích và thỏa mãn điều kiện $\int_0^s w_1(t)dt > 0$ với mọi $s \in (0, 1]$. và $\int_s^1 w_2(t)dt > 0$ với mọi $s \in [0, 1)$. Ký hiệu

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{M}_\phi(a, \mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha); t)$$

và

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{M}_\phi(b, \mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha); t)$$

với $t \in [0, 1]$.

Định lý 5. Cho $\mathcal{F}, \mathcal{G} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm số lần lượt được xác định bởi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) = & \psi^{-1} \left(\alpha(\psi \circ f \circ \mathcal{L}(t) - c[\phi \circ \mathcal{L}(t)]^2) \right. \\ & \left. + (1 - \alpha)(\psi \circ f \circ \mathcal{R}(t) - c[\phi \circ \mathcal{R}(t)]^2) \right) \end{aligned}$$

và

$$\mathcal{G}(t) = t\mathcal{F}(1) + (1 - t)\mathcal{F}(0).$$

Khi đó

- (1) $\mathcal{F}$ và $\mathcal{G}$ là các hàm $\mathcal{M}_\psi$ -lồi, tăng trên $[0, 1]$ và

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(0) &= \mathcal{G}(0) \\ \mathcal{F}(t) &\leq \mathcal{G}(t), \quad t \in [0, 1], \\ \mathcal{F}(1) &= \mathcal{G}(1). \end{aligned} \quad (14)$$

- (2) Với $s \in (0, 1]$, ta đặt

$$\mathcal{I}_1(s) = \psi^{-1} \left(\frac{\int_0^s \psi \circ \mathcal{F}(t) w_1(t) dt}{\int_0^s w_1(t) dt} \right)$$

và

$$\beta_1(s) = \frac{\int_0^s t w_1(t) dt}{\int_0^s w_1(t) dt}.$$

Khi đó $\mathcal{F} \circ \beta_1, \mathcal{I}_1$ và $\mathcal{G} \circ \beta_1$ là các hàm tăng trên $(0, 1]$ và thỏa mãn

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{F} \circ \beta_1(s) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{I}_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{G} \circ \beta_1(s) = \mathcal{G}(0), \\ \mathcal{F} \circ \beta_1(s) &\leq \mathcal{I}_1(s) \leq \mathcal{G} \circ \beta_1(s), \quad s \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (15)$$

- (3) Tương tự, với $s \in [0, 1)$, ta định nghĩa

$$\mathcal{I}_2(s) = \psi^{-1} \left(\frac{\int_s^1 \psi \circ \mathcal{F}(t) w_2(t) dt}{\int_s^1 w_2(t) dt} \right)$$

và

$$\beta_2(s) = \frac{\int_s^1 t w_2(t) dt}{\int_s^1 w_2(t) dt}.$$

Khi đó $\mathcal{F} \circ \beta_2, \mathcal{I}_2$ và $\mathcal{G} \circ \beta_2$ là các hàm tăng trên $[0, 1)$ và thỏa mãn

$$\mathcal{F} \circ \beta_2(s) \leq \mathcal{I}_2(s) \leq \mathcal{G} \circ \beta_2(s), \quad s \in [0, 1), \quad (16)$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \mathcal{F} \circ \beta_2(s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \mathcal{I}_2(s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \mathcal{G} \circ \beta_2(s) = \mathcal{G}(1).$$

Hơn nữa, nếu $w_1 = w_2$ thì $\mathcal{I}_1(1) = \mathcal{I}_2(0)$.

Để chứng minh định lý trên, chúng ta cần kết quả sau.

Bổ đề 6 ⁽⁵⁾. Cho $P : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm tăng, liên tục.

- (1) Với $s \in (0, 1]$, ta đặt

$$P_1(s) = \frac{\int_0^s P(t) w_1(t) dt}{\int_0^s w_1(t) dt}.$$

Khi đó P_1 là hàm tăng trên $(0, 1]$ và

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} P_1(s) = P(0) \leq P_1(s) \leq P(s), \quad s \in (0, 1]. \quad (17)$$

- (2) Tương tự, với $s \in [0, 1)$, ta đặt

$$P_2(s) = \frac{\int_s^1 P(t) w_2(t) dt}{\int_s^1 w_2(t) dt}.$$

Khi đó P_2 là hàm tăng trên $[0, 1)$ và

$$P(s) \leq P_2(s) \leq P(1) = \lim_{s \rightarrow 1^-} P_2(s), \quad s \in [0, 1).$$

Bây giờ ta chứng minh Định lý 5.

Chứng minh Định lý 5. Vì ψ đơn điệu nghiêm ngặt nên ta cần xét hai trường hợp của ψ . Trước hết giả sử rằng ψ tăng nghiêm ngặt trên J . Vì ψ liên tục trên J nên ψ^{-1} liên tục và tăng nghiêm ngặt trên $\psi(J)$.

1. Để chứng minh $\mathcal{F}$ là hàm $\mathcal{M}_\psi$ -lồi trên $[0, 1]$, ta chỉ cần chứng minh $\psi \circ \mathcal{F}$ lồi trên $[0, 1]$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} \psi \circ \mathcal{F}(t) &= \alpha (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(A(t)) - c(A(t))^2) \\ &\quad + (1 - \alpha) (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(B(t)) - c(B(t))^2), \end{aligned}$$

trong đó

$$A(t) = t\phi(a) + (1 - t)(\alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b)) \quad (18)$$

và

$$B(t) = t\phi(b) + (1 - t)(\alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b)). \quad (19)$$

Theo Bổ đề 4, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) - cx^2$ lồi trên $\phi([a, b])$, hơn nữa $A(t)$ và $B(t)$ tuyến tính trên $[0, 1]$ nên $\psi \circ \mathcal{F}$ lồi trên $[0, 1]$. Tính $\mathcal{M}_\psi$ -lồi của $\mathcal{G}$ trên $[0, 1]$ được suy ra trực tiếp từ định nghĩa của $\mathcal{G}$.

Tính toán trực tiếp, dễ thấy rằng

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(0) &= \mathcal{G}(0) \\ &= \psi^{-1} \left(\psi \circ f(\mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha)) \right. \\ &\quad \left. - c(\alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b))^2 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

và

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1) &= \mathcal{G}(1) \\ &= \psi^{-1} \left(\alpha\psi \circ f(a) + (1 - \alpha)\psi \circ f(b) \right. \\ &\quad \left. - c(\alpha\phi^2(a) + (1 - \alpha)\phi^2(b)) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Bây giờ, do tính lồi của $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) - cx^2$ nên

$$\begin{aligned} &\psi \circ f \circ \phi^{-1}(A(t)) - c(A(t))^2 \\ &\leq t(\psi \circ f(a) - c(\phi(a))^2) \\ &\quad + (1 - t)(\psi \circ f(\mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha)) \\ &\quad - c(\alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b))^2) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} &\psi \circ f \circ \phi^{-1}(B(t)) - c(B(t))^2 \\ &\leq t(\psi \circ f(b) - c(\phi(b))^2) \\ &\quad + (1 - t)(\psi \circ f(\mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha)) \\ &\quad - c(\alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b))^2). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \psi \circ \mathcal{F}(t) &\leq t\psi^{-1} \left(\alpha\psi \circ f(a) + (1 - \alpha)\psi \circ f(b) \right. \\ &\quad \left. - c(\alpha\phi^2(a) + (1 - \alpha)\phi^2(b)) \right) \\ &\quad + (1 - t)\psi^{-1} \left(\psi \circ f(\mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha)) \right. \\ &\quad \left. - c(\alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b))^2 \right) \\ &= \psi \circ \mathcal{G}(t). \end{aligned}$$

Vì ψ^{-1} tăng trên $\psi(J)$,

$$\mathcal{F}(t) \leq \mathcal{G}(t), \quad t \in [0, 1],$$

nên (14) đúng.

Tiếp theo, ta chứng minh $\mathcal{F}$ tăng. Giả sử $0 < t < r \leq 1$. Do tính $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh của f và $\alpha A(t) + (1 - \alpha)B(t) = \alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b)$, ta có

$$\begin{aligned} \psi \circ \mathcal{F}(0) &= \psi \circ f \circ \phi^{-1}(\alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b)) \\ &\quad - c(\alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b))^2 \\ &= \psi \circ f \circ \phi^{-1}(\alpha A(t) + (1 - \alpha)B(t)) \\ &\quad - c(\alpha A(t) + (1 - \alpha)B(t))^2 \\ &\leq \alpha (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(A(t)) - c(A(t))^2) \\ &\quad + (1 - \alpha) (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(B(t)) - c(B(t))^2) \\ &= \psi \circ \mathcal{F}(t). \end{aligned}$$

Mà $\psi \circ \mathcal{F}$ là hàm lồi nên

$$\frac{\psi \circ \mathcal{F}(r) - \psi \circ \mathcal{F}(t)}{r - t} \geq \frac{\psi \circ \mathcal{F}(t) - \psi \circ \mathcal{F}(0)}{t - 0}.$$

Do đó

$$\frac{\psi \circ \mathcal{F}(r) - \psi \circ \mathcal{F}(t)}{r - t} \geq \frac{\psi \circ \mathcal{F}(t) - \psi \circ \mathcal{F}(0)}{t - 0} \geq 0,$$

hay $\psi \circ \mathcal{F}$ tăng trên $[0, 1]$. Vì ψ^{-1} tăng trên $\psi(J)$ nên $\mathcal{F}$ tăng trên $[0, 1]$. Vì

$$\psi \circ \mathcal{G}(t) = t[\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0)] + \mathcal{F}(0)$$

và

$$\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0) \geq 0$$

nên $\psi \circ \mathcal{G}$ tăng trên $[0, 1]$ hay $\mathcal{G}$ tăng trên $[0, 1]$.

2. Áp dụng Bổ đề 6 với $P = \psi \circ \mathcal{F}$ ta có $\psi \circ \mathcal{I}_1$ tăng trên $(0, 1]$ với

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \psi \circ \mathcal{I}_1(s) = \psi \circ \mathcal{F}(0).$$

Vì ψ^{-1} tăng nghiêm ngặt và liên tục trên $\psi(J)$ nên $\mathcal{I}_1$ tăng trên $(0, 1]$ và

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{I}_1(s) = \mathcal{F}(0).$$

Lại theo Bổ đề 6, ta có β_1 tăng trên $(0, 1]$ với

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \beta_1(s) = 0 \leq \beta_1(s) \leq s, \quad s \in (0, 1].$$

Do đó $\mathcal{F} \circ \beta_1$ và $\mathcal{G} \circ \beta_1$ xác định, tăng trên $(0, 1]$ và

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{F} \circ \beta_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \mathcal{G} \circ \beta_1(s) = \mathcal{G}(0).$$

Tiếp theo, chúng ta chứng minh các bất đẳng thức trong (15). Cố định $s \in (0, 1]$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen¹⁷ cho hàm lồi $\psi \circ \mathcal{F}$ trên khoảng $[0, s]$, ta được

$$\psi \circ \mathcal{F} \left(\frac{\int_0^s t w_1(t) dt}{\int_0^s w_1(t) dt} \right) \leq \frac{\int_0^s \psi \circ \mathcal{F}(t) w_1(t) dt}{\int_0^s w_1(t) dt}.$$

Suy ra

$$\mathcal{F} \circ \beta_1(s) \leq \mathcal{I}_1(s).$$

Do $\mathcal{F}(t) \leq \mathcal{G}(t)$, $t \in [0, 1]$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^s \psi \circ \mathcal{F}(t) w_1(t) dt}{\int_0^s w_1(t) dt} &\leq \frac{\int_0^s \psi \circ \mathcal{G}(t) w_1(t) dt}{\int_0^s w_1(t) dt} \\ &= \psi \circ \mathcal{G} \circ \beta_1(s). \end{aligned}$$

Vì hàm ψ^{-1} tăng nên

$$\mathcal{I}_1(s) \leq \mathcal{G} \circ \beta_1(s).$$

3. Áp dụng Bổ đề 6 với $P = \psi \circ \mathcal{F}$ ta có $\psi \circ \mathcal{I}_2$ tăng trên $[0, 1]$ với

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \psi \circ \mathcal{I}_2(s) = \psi \circ \mathcal{F}(1).$$

Vì ψ^{-1} tăng nghiêm ngặt và liên tục trên $\psi(J)$ nên $\mathcal{I}_2$ tăng trên $[0, 1]$ và

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \mathcal{I}_2(s) = \mathcal{F}(1).$$

Lại theo Bổ đề 6, ta có β_2 tăng trên $[0, 1]$ với

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \beta_2(s) = 1 \geq \beta_2(s) \geq s, \quad s \in [0, 1].$$

Vì vậy, $\mathcal{F} \circ \beta_2$ và $\mathcal{G} \circ \beta_2$ xác định, tăng trên $[0, 1]$ và

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \mathcal{F} \circ \beta_2(s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \mathcal{G} \circ \beta_2(s) = \mathcal{G}(1).$$

Bây giờ, chúng ta chứng minh các bất đẳng thức trong (16). Cố định $s \in [0, 1]$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen¹⁷ cho hàm lồi $\psi \circ \mathcal{F}$ trên khoảng $[s, 1]$, ta có

$$\psi \circ \mathcal{F} \left(\frac{\int_s^1 t w_2(t) dt}{\int_s^1 w_2(t) dt} \right) \leq \frac{\int_s^1 \psi \circ \mathcal{F}(t) w_2(t) dt}{\int_s^1 w_2(t) dt}$$

do đó

$$\mathcal{F} \circ \beta_2(s) \leq \mathcal{I}_2(s).$$

Từ $\mathcal{F}(t) \leq \mathcal{G}(t)$, $t \in [0, 1]$, ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{\int_s^1 \psi \circ \mathcal{F}(t) w_2(t) dt}{\int_s^1 w_2(t) dt} &\leq \frac{\int_s^1 \psi \circ \mathcal{G}(t) w_2(t) dt}{\int_s^1 w_2(t) dt} \\ &= \psi \circ \mathcal{G} \circ \beta_2(s). \end{aligned}$$

Vì hàm ψ^{-1} tăng nên

$$\mathcal{I}_2(s) \leq \mathcal{G} \circ \beta_2(s).$$

Ngoài ra, khi $w_1 = w_2$, từ các định nghĩa của $\mathcal{I}_1$ và $\mathcal{I}_2$ suy ra $\mathcal{I}_1(1) = \mathcal{I}_2(0)$.

Định lý được chứng minh tương tự cho trường hợp khi ψ giảm. $\square$

Định lý 5 không chỉ là một hệ quả của tính $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh mà nó còn đặc trưng cho lớp hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh với modun c và liên tục.

Hệ quả 7. *Đối với hàm liên tục $f : I \rightarrow J$, các khẳng định sau đây là tương đương:*

- (1) f là hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh với modun c .
- (2) Hàm $\mathcal{F}$ tăng trên $[0, 1]$ với mọi $a, b \in I, a < b$ và $\alpha = 1/2$.
- (3) Hàm $\mathcal{I}_1$ tăng trên $(0, 1]$ với mọi $a, b \in I, a < b, \alpha = 1/2$ và $w_1 = 1$.
- (4) Với mọi $a, b \in I$ và $a < b$, ta có

$$\begin{aligned} \psi \circ f(\mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha)) - c(\alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b))^2 \\ \leq \frac{1}{\phi(b) - \phi(a)} \int_a^b (\psi \circ f(x) - c\phi^2(x)) d\phi(x). \end{aligned}$$

- (5) Hàm $\mathcal{I}_2$ tăng trên $[0, 1]$ với mọi $a, b \in I, a < b, \alpha = 1/2$ và $w_2 = 1$.
- (6) Với mọi $a, b \in I$ và $a < b$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi(b) - \phi(a)} \int_a^b (\psi \circ f(x) - c\phi^2(x)) d\phi(x) \\ \leq \alpha\psi \circ f(a) + (1 - \alpha)\psi \circ f(b) \\ - c(\alpha\phi^2(a) + (1 - \alpha)\phi^2(b)). \end{aligned}$$

- (7) Hàm $\mathcal{G}$ tăng trên $[0, 1]$ với mọi $a, b \in I, a < b$ và $\alpha = 1/2$.

Để chứng minh Hệ quả 7, ta cần kết quả sau đây.

Bổ đề 8 (¹⁰ Theorem 6). *Cho $I \subset \mathbb{R}$ là một khoảng và $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương.*

- (1) f là hàm lồi mạnh với modun c .
- (2) Với mọi $x, y \in I, x < y$, ta có

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{c}{12}(y-x)^2 \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt.$$

- (3) Với mọi $x, y \in I, x < y$, ta có

$$\frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{c}{6}(y-x)^2.$$

Chứng minh của Hệ quả 7. Theo Định lý 5, các khẳng định (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4), (1) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) và (1) $\Rightarrow$ (7) đúng. Phần còn lại là chứng minh (4) $\Rightarrow$ (1), (6) $\Rightarrow$ (1) và (7) $\Rightarrow$ (1). Không mất tổng quát có thể giả sử ψ đơn điệu tăng. Ta cần chứng minh $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ lồi mạnh trên $\phi(I)$ miễn là một trong các điều kiện (4), (6) và (7) xảy ra. Vì ϕ liên tục và đơn điệu nghiêm ngặt trên I nên ϕ^{-1} liên tục và đơn điệu nghiêm ngặt trên $\phi(I)$. Bây giờ tính liên tục của ψ , f và ϕ^{-1} kéo theo $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ liên tục trên $\phi(I)$. Rõ ràng, (7) kéo theo $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ lồi mạnh trung điểm trên $\phi(I)$. Do đó $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ lồi mạnh trên $\phi(I)$. Cuối cùng, từ Hệ quả 8 ta thấy khi một trong các điều kiện (4) và (6) xảy ra đối với hàm liên tục $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ trên $\phi(I)$ thì $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ lồi mạnh trên $\phi(I)$. Vậy hệ quả được chứng minh xong. $\square$

Từ Định lý 5, chúng ta có thể thiết lập được một số bất đẳng thức kiểu Fejér đối với các hàm $(\mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\psi)$ -lồi mạnh với modul c bằng cách chọn các hàm w_1 và w_2 khác nhau. Chẳng hạn, ta chọn

$$w_j(t) = (1 - \alpha)g_j \circ \mathcal{L}(t) + \alpha g_j \circ \mathcal{R}(t), \quad t \in [0, 1],$$

trong đó $g_j : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, với $j = 1, 2$, được chọn thỏa mãn

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} g_1 \circ \mathcal{L}(t) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} g_1 \circ \mathcal{R}(t), \quad t \in [0, s] \quad (22)$$

và

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} g_2 \circ \mathcal{L}(t) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} g_2 \circ \mathcal{R}(t), \quad t \in [s, 1]. \quad (23)$$

Chú ý rằng khi $\alpha = 1/2$ và $\phi(x) = x$, các giả thiết (22) và (23) quy về các giả thiết g_1 và g_2 đối xứng qua $(a + b)/2$.

Sử dụng (22) và $\mathcal{L}(0) = \mathcal{R}(0)$ dễ thấy rằng

$$\begin{aligned} \int_0^s w_1(t) dt &= (1 - \alpha) \int_0^s g_1 \circ \mathcal{L}(t) dt + \alpha \int_0^s g_1 \circ \mathcal{R}(t) dt \\ &= \frac{1}{\phi(b) - \phi(a)} \int_{\mathcal{L}(s)}^{\mathcal{R}(s)} g_1(x) d\phi(x) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} &\int_0^s \psi \circ \mathcal{F}(t) w_1(t) dt \\ &= (1 - \alpha) \int_0^s (\psi \circ f \circ \mathcal{L}(t) - c[\phi \circ \mathcal{L}(t)]^2) g_1 \circ \mathcal{L}(t) dt \\ &\quad + \alpha \int_0^s (\psi \circ f \circ \mathcal{R}(t) - c[\phi \circ \mathcal{R}(t)]^2) g_1 \circ \mathcal{R}(t) dt \\ &= \frac{1}{\phi(b) - \phi(a)} \int_{\mathcal{L}(s)}^{\mathcal{R}(s)} (\psi \circ f(x) - c\phi^2(x)) g_1(x) d\phi(x) \end{aligned}$$

và do đó

$$\mathcal{I}_1(s) = \psi^{-1} \left(\frac{\int_{\mathcal{L}(s)}^{\mathcal{R}(s)} (\psi \circ f(x) - c\phi^2(x)) g_1(x) d\phi(x)}{\int_{\mathcal{L}(s)}^{\mathcal{R}(s)} g_1(x) d\phi(x)} \right).$$

Tương tự, do (23), $\mathcal{L}(1) = a$ và $\mathcal{R}(1) = b$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(s) &= \psi^{-1} \left(\frac{\int_a^{\mathcal{L}(s)} (\psi \circ f(x) - c\phi^2(x)) g_2(x) d\phi(x)}{\int_a^{\mathcal{L}(s)} g_2(x) d\phi(x) + \int_{\mathcal{R}(s)}^b g_2(x) d\phi(x)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\int_{\mathcal{R}(s)}^b (\psi \circ f(x) - c\phi^2(x)) g_2(x) d\phi(x)}{\int_a^{\mathcal{L}(s)} g_2(x) d\phi(x) + \int_{\mathcal{R}(s)}^b g_2(x) d\phi(x)} \right). \end{aligned}$$

Cùng với Định lý 5, ta có kết quả sau đây.

Hệ quả 9. Giả sử $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ là các hàm khả tích, trong đó $\int_0^s g_1 \circ \mathcal{L}(t) dt > 0$ với mọi $s \in (0, 1]$ và $\int_s^1 g_2 \circ \mathcal{R}(t) dt > 0$ với mọi $s \in [0, 1]$ và thỏa mãn (22), (23). Khi đó,

(i) Với mọi $s \in (0, 1]$, ta có

$$\begin{aligned} &\psi^{-1} \left(\psi \circ f(\mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha)) - c(\alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b))^2 \right) \\ &\leq \mathcal{F} \left(\frac{\int_0^s t g_1 \circ \mathcal{L}(t) dt}{\int_0^s g_1 \circ \mathcal{L}(t) dt} \right) \\ &\leq \psi^{-1} \left(\frac{\int_{\mathcal{L}(s)}^{\mathcal{R}(s)} (\psi \circ f(x) - c\phi^2(x)) g_1(x) d\phi(x)}{\int_{\mathcal{L}(s)}^{\mathcal{R}(s)} g_1(x) d\phi(x)} \right) \\ &\leq \mathcal{G} \left(\frac{\int_0^s t g_1 \circ \mathcal{L}(t) dt}{\int_0^s g_1 \circ \mathcal{L}(t) dt} \right) \\ &\leq \psi^{-1} \left(\alpha\psi \circ f(a) + (1 - \alpha)\psi \circ f(b) \right. \\ &\quad \left. - c(\alpha\phi^2(a) + (1 - \alpha)\phi^2(b)) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

(ii) Với mọi $s \in [0, 1)$, ta có

$$\begin{aligned} &\psi^{-1} \left(\psi \circ f(\mathcal{M}_\phi(a, b; \alpha)) - c(\alpha\phi(a) + (1 - \alpha)\phi(b))^2 \right) \\ &\mathcal{F} \left(\frac{\int_s^1 t g_2 \circ \mathcal{L}(t) dt}{\int_s^1 g_2 \circ \mathcal{L}(t) dt} \right) \\ &= \psi^{-1} \left(\frac{\int_a^{\mathcal{L}(s)} (\psi \circ f(x) - c\phi^2(x)) g_2(x) d\phi(x)}{\int_a^{\mathcal{L}(s)} g_2(x) d\phi(x) + \int_{\mathcal{R}(s)}^b g_2(x) d\phi(x)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\int_{\mathcal{R}(s)}^b (\psi \circ f(x) - c\phi^2(x)) g_2(x) d\phi(x)}{\int_a^{\mathcal{L}(s)} g_2(x) d\phi(x) + \int_{\mathcal{R}(s)}^b g_2(x) d\phi(x)} \right) \\ &\leq \mathcal{G} \left(\frac{\int_s^1 t g_2 \circ \mathcal{L}(t) dt}{\int_s^1 g_2 \circ \mathcal{L}(t) dt} \right) \\ &\leq \psi^{-1} \left(\alpha\psi \circ f(a) + (1 - \alpha)\psi \circ f(b) \right. \\ &\quad \left. - c(\alpha\phi^2(a) + (1 - \alpha)\phi^2(b)) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Nhận xét 10. Hệ quả 9 mở rộng thực sự một số bất đẳng thức Hermite-Hadamard được thiết lập gần đây cho các lớp hàm lồi mạnh và một số dạng mở rộng của hàm lồi mạnh.

1. Chọn $\alpha = 1/2$, và $\psi(x) = \phi(x) = x$, từ bất đẳng thức (24) ta nhận được kết quả chặt hơn bất đẳng thức Fejér (4) do Azocar và các cộng sự³ Theorem 5 thiết lập cho lớp hàm lồi mạnh.
2. Chọn $\alpha = 1/2$, $g_1 = 1$ và $\psi(x) = \phi(x) = x$. Khi đó, bất đẳng thức (24) kéo theo

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{c}{12}(b-a)^2 \\
& \leq \frac{f\left(\frac{5a+3b}{8}\right) + f\left(\frac{3a+5b}{8}\right)}{2} + \frac{13c}{192}(b-a)^2 \\
& \leq \frac{2}{b-a} \int_{\frac{a+3b}{4}}^{\frac{3a+b}{4}} f(x)dx + \frac{c}{16}(b-a)^2 \\
& \leq \frac{f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)}{2} + \frac{c}{48}(b-a)^2 \\
& \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \\
& \leq \frac{1}{2} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{c}{24}(b-a)^2 \\
& \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}(b-a)^2,
\end{aligned}$$

với $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi mạnh với modul c . Kết quả này chặt hơn bất đẳng thức (3).

3. Nếu $\alpha = 1/2$, $g_1 = 1$ và $\phi(x) = 1/x$, $\psi(x) = x$ thì (24) suy ra bất đẳng thức sau đây¹⁴.

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) + \frac{c}{12}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^2 \\
& \leq \frac{f\left(\frac{8ab}{5a+3b}\right) + f\left(\frac{8ab}{3a+5b}\right)}{2} + \frac{13c}{192}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^2 \\
& \leq \frac{(3a+b)(a+3b)}{8(b-a)} \int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+3b}{4}} \frac{f(x)}{x^2} dx + \frac{c}{16}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^2 \\
& \leq \frac{f\left(\frac{4ab}{a+3b}\right) + f\left(\frac{4ab}{3a+b}\right)}{2} + \frac{c}{48}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^2 \\
& \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \\
& \leq \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2} \right) - \frac{c}{24}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^2 \\
& \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^2.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên làm chặt bất đẳng thức trong¹⁴ do Noor và cộng sự thiết lập cho các hàm lồi điều hòa mạnh với modul c .

4. Từ (24) ta nhận được một bất đẳng thức làm mịn bất đẳng thức Hermite-Hadamard đối với hàm log-lồi mạnh được xây dựng trong¹⁶ nếu

$$\alpha = \frac{1}{2}, g_1 = 1 \text{ và } \phi(x) = x, \psi(x) = \ln x:$$

$$\begin{aligned}
& \exp\left(\ln f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{c}{12}(b-a)^2\right) \\
& \leq \exp\left(\frac{\ln f\left(\frac{5a+3b}{8}\right) + \ln f\left(\frac{3a+5b}{8}\right)}{2} + \frac{13c}{192}(b-a)^2\right) \\
& \leq \exp\left(\frac{2}{b-a} \int_{\frac{a+3b}{4}}^{\frac{3a+b}{4}} \ln f(x)dx + \frac{c}{16}(b-a)^2\right) \\
& \leq \exp\left(\frac{\ln f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + \ln f\left(\frac{a+3b}{4}\right)}{2} + \frac{c}{48}(b-a)^2\right) \\
& \leq \exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x)dx\right) \\
& \leq 1/2 \exp\left(\ln f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{c}{12}(b-a)^2\right) \\
& \quad + 1/2 \exp\left(\frac{\ln f(a) + \ln f(b)}{2} - \frac{c}{6}(b-a)^2\right) \\
& \leq \exp\left(\frac{\ln f(a) + \ln f(b)}{2} - \frac{c}{6}(b-a)^2\right).
\end{aligned}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G. Aumann. Konvexe Funktionen und die Induktion bei Ungleichungen zwischen Mittelwerten, Sitzungsber., Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl., **1933**, 1933, 403–415.
2. A. Azocar, J. Giménez, K. Nikodem, J.L. Sanchez. On strongly midconvex functions, Opuscula Math, **2021**, 31, 15–26.
3. A. Azocar, K. Nikodem, G. Roa. Fejer-type inequalities for strongly convex functions, Annal. Math. Silesianae, **2012**, 26, 43–54.
4. S.S. Dragomir, C.E.M. Pearce. *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, 2002.
5. D.T. Duc, N.N. Hue, N.D.V. Nhan, V.K. Tuan, Convexity according to a pair of quasi-arithmetic means and inequalities, J. Math. Anal. Appl., **2020**, 488, 124059.
6. L. Fejér. Über die Fourierreihen II, Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss., **1996**, 24, 369–390 (in Hungarian).
7. J.L.W.V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inegalités entre les valeurs moyennes, Acta Math., **1906**, 30, 175–193.
8. J. Hadamard. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction

- considérée par Riemann', J. Math. Pures Appl., 58 (1893), 171-215.
9. Ch. Hermite. Sur deux limites d'une intégrale dé finie, Mathesis, **1883**, 3, p. 82.
 10. N. Merentes, K. Nikodem. Remarks on strongly convex functions, Aequationes Math, **2010**, 80, 193-199.
 11. K. Nikodem, Zs. Pales. Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions, Banach J. Math. Anal. **2011**, 5, 83-87.
 12. C.P. Niculescu, L.-E. Persson. *Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach*, CMS Books in Mathematics, vol. 23, Springer, New York, 2006.
 13. M.A. Noor, K.I. Noor. Strongly log-Convex Functions, Inf. Sci. Lett., **2021**, 10, 33-38
 14. M.A. Noor, K.I. Noor, S. Iftikhar. Hermite-Hadamard inequalities for strongly harmonic convex functions, J. Inequal. Spec. Funct., **2016**, 7, 99-113.
 15. M. A. Noor and K. I. Noor, Strongly exponentially convex functions, U.P.B. Bull Sci. Appl. Math. Series A, **2019**, 81, 75-84.
 16. M.Z. Sarikaya and H. Yaldiz, On Hermite-Hadamard type inequalities for strongly log-convex functions, arXiv: 1203.2281v1 [math.FA], **2012**.
 17. J.E. Pečarić, F. Proschan, Y.C. Tong. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, Boston, 1992.
 18. B.T. Polyak. Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions, Soviet Math. Dokl., **1966**, 7, 72-75.