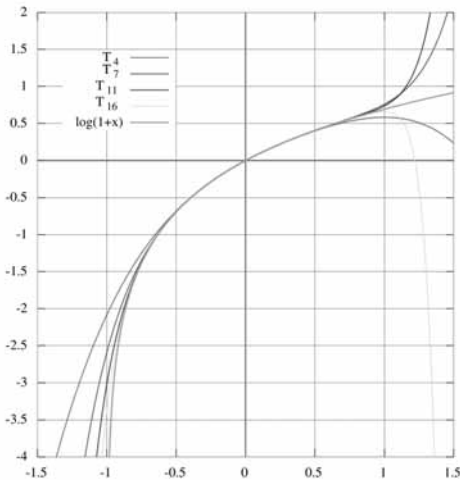


BÀI 2: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN



Mục tiêu

- Hiểu được khái niệm đạo hàm, vi phân của hàm số.
- Giải được các bài tập về đạo hàm, vi phân.
- Biết vận dụng linh hoạt các định lý, khai triển và các quy tắc trong giải bài tập.
- Khảo sát tính chất, dáng điệu của các hàm cơ bản.
- Hiểu ý nghĩa hình học cũng như ý nghĩa thực tiễn của đạo hàm và vi phân.

Thời lượng

- Bài này được trình bày trong khoảng 4 tiết bài tập và 3 tiết lý thuyết.
- Bạn nên dành mỗi tuần khoảng 120 phút trong vòng hai tuần để học bài này.

Nội dung

- Ôn tập, củng cố khái niệm đạo hàm, vi phân của hàm số một biến số.
- Các tính chất, ứng dụng của lớp hàm khả vi trong toán học.

Hướng dẫn học

- Bạn cần đọc kỹ các ví dụ để nắm vững lý thuyết.
- Bạn nên học thuộc một số khái niệm cơ bản, bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp và các định lý Cauchy, Lagrange, Fermat,...

2.1. Đạo hàm

2.1.1. Khái niệm đạo hàm

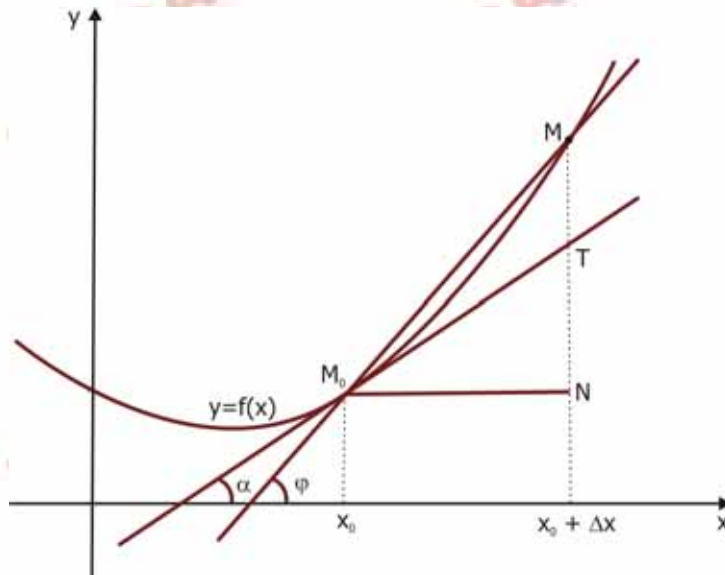
Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Nếu tồn tại giới hạn của tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi $x \rightarrow x_0$ thì giới hạn ấy được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là: $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

Đặt: $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$ ta được: $y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0 .

Về mặt hình học, đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 biểu diễn hệ số góc của đường tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm x_0 là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.



Hình 2.1

2.1.2. Các phép toán về đạo hàm

Nếu các hàm số $u(x), v(x)$ có các đạo hàm tại x thì:

- $u(x) + v(x)$ cũng có đạo hàm tại x và $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$.
- $u(x)v(x)$ cũng có đạo hàm tại x và $(u(x).v(x))' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$.
- $\frac{u(x)}{v(x)}$ cũng có đạo hàm tại x , trừ khi $v(x) = 0$ và

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)}.$$

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm theo x , hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm theo u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm theo x và $y'(x) = y'(u).u'(x)$.

2.1.3. Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

Ta có bảng tương ứng đạo hàm của hàm hợp.

$(c)' = 0$ (c là hằng số) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$) $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$) $(e^x)' = e^x$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0$) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$) $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ($x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($ x < 1$) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($ x < 1$) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(u(x))^\alpha' = \alpha u(x)^{\alpha-1} u'(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$) $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \ln a (u'(x))$ ($a > 0, a \neq 1$) $(e^{u(x)})' = e^{u(x)} u'(x)$ $(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1, u(x) > 0$) $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ($u(x) > 0$) $(\sin u(x))' = \cos u(x) (u'(x))$ $(\cos u(x))' = -\sin u(x) (u'(x))$ $(\operatorname{tg} u(x))' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$ ($u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$) $(\operatorname{cotg} u(x))' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$ ($u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$) $(\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$ ($ u(x) < 1$) $(\arccos u(x))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$ ($ u(x) < 1$) $(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$ $(\operatorname{arctg} u(x))' = -\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
---	--

2.2. Vi phân

2.2.1. Định nghĩa vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm tại x , theo định nghĩa của đạo hàm ta có:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

trong đó: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Vậy khi: $\Delta x \rightarrow 0, \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + k, k \rightarrow 0$ khi $\Delta x \rightarrow 0$.

Do đó: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + k\Delta x$.

Ta có số hạng $k.\Delta x$ là một VCB bậc cao hơn Δx . Do đó Δy và $f'(x)\Delta x$ là hai VCB tương đương. Biểu thức $f'(x)\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x . Kí hiệu là dy hay $df(x)$.

$$\text{Vậy: } dy = f'(x)\Delta x. \quad (2.1)$$

Nếu hàm số có vi phân tại x , ta nói $f(x)$ khả vi tại x . Như vậy, đối với hàm số một biến số khái niệm hàm số có đạo hàm tại x và khái niệm hàm số khả vi tại x tương đương nhau.

Nếu $y = x$ thì $dy = dx = 1.\Delta x$. Vậy đối với biến độc lập x , ta có $dx = \Delta x$. Do đó, công thức (2.1) có thể viết là: $dy = f'(x)dx$ (2.2).

Ví dụ 1:

$$\text{Nếu } y = \sqrt{1 + \ln x} \text{ thì } y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \cdot \frac{1}{x}. \text{ Do đó } dy = \frac{1}{2x\sqrt{1 + \ln x}} dx.$$

2.2.2. Vi phân của tổng, tích, thương

Từ công thức đạo hàm của tổng, tích, thương của hai hàm số suy ra:

$$d(u + v) = du + dv$$

$$d(u.v) = u.dv + vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u.dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

2.2.3. Vi phân của hàm hợp - tính bất biến về dạng của biểu thức vi phân

Nếu $y = f(x)$ là hàm số khả vi của biến độc lập x thì vi phân của nó được tính theo công thức (2.2), ta hãy xét trường hợp x là hàm số khả vi của một biến độc lập t nào đó:

$$x = \varphi(t).$$

Khi đó y là hàm số của biến độc lập t : $y = f(\varphi(t))$

Theo công thức tính vi phân và theo quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$dy = y'_t dt = (y'_x x'_t) dt = y'_x (x'_t dt) = y'_x dx.$$

Như vậy biểu thức vi phân vẫn giữ nguyên dạng trong trường hợp x không phải là biến độc lập, mà phụ thuộc vào một biến độc lập khác. Nói cách khác, biểu thức vi phân bất biến đối với phép đổi biến số: $x = \varphi(t)$.

2.2.4. Ứng dụng vi phân vào tính gần đúng

Vì khi $\Delta x \rightarrow 0$; $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là một VCB tương đương với $f'(x_0)\Delta x$, nên khi $|\Delta x|$ khá nhỏ, ta có công thức tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x.$$

Ví dụ 2:

Tính gần đúng $\sqrt[4]{15,8}$

Ta cần tính gần đúng: $y = f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ tại $15,8 = 16 - 0,2$.

Đặt $x_0 = 16, \Delta x = -0,2$

Ta có: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Vì: $f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2, f'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, f'(x_0) = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}$.

Ta được: $\sqrt[4]{15,8} \approx \sqrt[4]{16} - \frac{0,2}{32} = 2 - 0,00625 \approx 1,9938$.

2.3. Các định lý cơ bản về hàm số khả vi

2.3.1. Định lý Fermat

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) và đạt cực trị (cực đại hay cực tiểu) tại $c \in (a, b)$. Khi đó nếu tại c hàm số $f(x)$ có đạo hàm thì $f'(c) = 0$.

Chứng minh:

Giả sử hàm số $f(x)$ nhận giá trị lớn nhất tại c . Với mọi $x \in (a, b)$ ta có:

$$f(x) \leq f(c) \Rightarrow f(x) - f(c) \leq 0.$$

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại c thì $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c \pm} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

Với giả thiết $x > c$ ta có:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) = \lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Với giả thiết $x < c$ ta có:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'(c) = \lim_{x \rightarrow c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Do đó suy ra $f'(c) = 0$.

Trường hợp $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $c \in (a, b)$ chứng minh hoàn toàn tương tự.

2.3.2. Định lý Rolle

Giả sử hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

- Xác định và liên tục trên $[a, b]$
- Khả vi trong khoảng (a, b)
- $f(a) = f(b)$.

Khi đó, tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Chứng minh:

Đặt $f(x) = f(b) = d$. Xét 3 trường hợp:

- Nếu $f(x) = d, \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x)$ là hàm hằng trên $[a, b]$. Khi đó c là điểm tùy ý thuộc $[a, b]$.
- Nếu $\exists x \in (a, b)$ sao cho $f(x) > d$, thì khi đó do f liên tục trên $[a, b]$ nên tồn tại giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên $[a, b]$ đạt tại $c \in [a, b]$. Do $M > d$ nên $c \in (a, b)$, do đó c là điểm tới hạn của f . Mặt khác do f khả vi trên (a, b) nên $f'(c) = 0$.
- Trường hợp $\exists x \in (a, b)$, sao cho $f(x) < d$ cũng lập luận tương tự.

Ý nghĩa hình học của định lý Rolle: Nếu hai điểm A, B có tung độ bằng nhau và được nối với nhau bằng một đường cong liên tục $y = f(x)$, có tiếp tuyến tại mọi điểm, thì trên đường cong có ít nhất một điểm mà tại đó tiếp tuyến song song với trục hoành.

2.3.3. Định lý Lagrange

Giả sử hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- Xác định và liên tục trên $[a, b]$.
- Khả vi trong khoảng (a, b) .

Khi đó, tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Chứng minh:

Đặt: $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), x \in [a, b]$.

Từ các giả thiết của định lý Lagrange dễ dàng thấy rằng hàm số $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

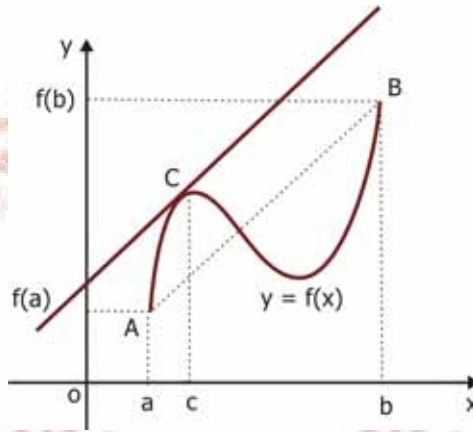
- Liên tục trên $[a, b]$.
- Có đạo hàm trong (a, b) : $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \forall x \in (a, b)$.
- $g(a) = g(b) = 0$.

Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lý đã được chứng minh.

Ý nghĩa hình học của định lý Lagrange: Nếu hai điểm A và B được nối với nhau bằng một đường cong liên tục $y = f(x)$, có tiếp tuyến tại mọi điểm, thì trên đường cong đó có ít nhất một điểm mà tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng AB .



Hình 2.2

2.3.4. Định lý Cauchy

Giả sử các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau. Xác định và liên tục trên $[a, b]$.

- Khả vi trong khoảng (a, b) .
- $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$.

Khi đó tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Chứng minh:

Trước hết ta thấy rằng, với các giả thiết của định lý thì $g(b) \neq g(a)$. Thật vậy, nếu $g(b) = g(a)$ thì theo định lý Rolle, tồn tại điểm c sao cho $g'(c) = 0$, điều này trái với giả thiết rằng $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$.

Xét hàm số: $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x), x \in [a, b]$.

Dễ thấy rằng:

- $\varphi(x)$ liên tục trên $[a, b]$.
- $\varphi(x)$ khả vi trong (a, b) .
- $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Theo định lý Rolle, tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Định lý đã được chứng minh.

Nhận xét: Định lý Lagrange là một trường hợp riêng của định lý Cauchy (với $g(x) = x$)

2.4. Đạo hàm và vi phân cấp cao

2.4.1. Đạo hàm cấp cao

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thì $y' = f'(x)$ gọi là đạo hàm cấp một của $f(x)$. Đạo hàm, nếu có của đạo hàm cấp một gọi là đạo hàm cấp hai.

Kí hiệu là: $y'' = f''(x)$.

Vậy: $y'' = f''(x) = (f'(x))'$.

Tương tự, đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ của $f(x)$ gọi là đạo hàm cấp n , kí hiệu là: $f^{(n)}(x)$ Vậy $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

2.4.2. Vi phân cấp cao

Nếu hàm số $y = f(x)$ khả vi tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) thì vi phân dy là một hàm số của biến x : $dy = f'(x)dx$, trong đó vi phân dx của biến độc lập x là số gia Δx không phụ thuộc x . khái niệm vi phân cấp cao được định nghĩa tương tự như đạo hàm cấp cao.

Định nghĩa:

Vi phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ là vi phân của vi phân cấp $(n-1)$ của hàm số đó (ta gọi vi phân dy là vi phân cấp 1).

Vi phân cấp n của hàm số $y = f(x)$ được kí hiệu là $d^n y, d^n f(x)$:

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Trong công thức vi phân $dy = y' dx$, đạo hàm y' phụ thuộc x , còn $dx = \Delta x$ là số gia bất kỳ của biến độc lập x , không phụ thuộc x . Do đó, khi xem dy như một hàm số của x thì dx được xem như hằng số. Ta có:

$$d^2 y = d(dy) = d(y'(x)dx) = dx \cdot d(y'(x)) = dx \cdot (y'(x))' dx = y''(x)(dx)^2.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta có thể chứng minh công thức tính vi phân cấp n của một hàm số theo đạo hàm cấp n của nó:

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n \text{ hoặc } d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

CHÚ Ý :

Biểu thức vi phân cấp cao không có tính bất biến về dạng như biểu thức vi phân cấp một. Tức là với, $n > 1$ công thức này chỉ đúng khi x là biến độc lập.

2.5. Công thức Taylor và công thức Maclaurin

2.5.1. Công thức Taylor

Ở phần 2.2, khi nghiên cứu về vi phân ta đã biết rằng hàm số $f(x)$ xác định ở lân cận của x_0 , có đạo hàm tại x_0 , thì ta có công thức tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Nếu đặt $x = x_0 + \Delta x$, công thức đó trở thành:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vậy ở lân cận của x_0 ta xem $f(x)$ gần đúng bằng một đa thức bậc 1. Vấn đề đặt ra là: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp cao hơn tại x_0 , liệu có thể xấp xỉ $f(x)$ bằng một đa thức có bậc lớn hơn 1 được không? Công thức Taylor mà ta thừa nhận sau đây sẽ giải quyết vấn đề đó.

Định lý:

Nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

- Có đạo hàm đến cấp n trên đoạn $[a, b]$.
- Có đạo hàm cấp $(n+1)$ trong khoảng (a, b)

thì tồn tại điểm $c \in (a, b)$ sao cho với điểm $x_0 \in (a, b)$ và với mọi $x \in (a, b)$ ta có

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (2.3)$$

với $c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1$.

Công thức (2.3) gọi là công thức Taylor. Số hạng cuối ở vế phải gọi là số dư dạng Lagrange. Biểu diễn của hàm số $f(x)$ dưới dạng (2.3) gọi là khai triển hữu hạn của $f(x)$ ở lân cận của điểm x_0 .

Nhận xét:

Nếu đặt $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ thì công thức Taylor cho phép ta biểu diễn $f(x)$ gần đúng bằng đa thức $P_n(x)$ ở lân cận của x_0 với sai số:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}, \forall x \in [a, b]$$

với M_{n+1} là một số dương nào đó, thì ta có đánh giá sau đối với $R_n(x)$:

$$R_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

Có thể chứng minh được rằng với một giá trị xác định của x , vế phải của bất đẳng thức trên dần tới 0 khi $n \rightarrow \infty$. Khi đó ta có thể xấp xỉ $f(x)$ bởi một đa thức $P_n(x)$ với độ chính xác bất kỳ.

2.5.2. Công thức Maclaurin

Trong công thức Taylor, khi $x_0 = 0 \in (a, b)$ ta thu được khai triển:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in (a, b) \quad (2.4)$$

Công thức trên gọi là công thức Mac Laurin.

Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp thường dùng

- $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > -1$.

Ta có:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

...

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$$

Do đó: $f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), \dots, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$.

Thay vào công thức (2.4) ta được:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

$$0 < \theta < 1, x > -1.$$

Đặc biệt nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ thì $[(1+x)^n]^{(n+1)} = 0$, nên $R_n(x) = 0$ ta được:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots + x^n.$$

Đó chính là công thức tính nhị thức Newton quen thuộc.

Thay $\alpha = -1$ vào công thức ta nhận được:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}; 0 < \theta < 1.$$

Thay $x = -x$ vào công thức trên ta có:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}}; 0 < \theta < 1.$$

- $f(x) = e^x$

Ta có: $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1$

$$\text{Vậy: } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}, 0 < \theta < 1.$$

2.6. Ứng dụng của đạo hàm

2.6.1. Tính các giới hạn dạng vô định

2.6.1.1. Quy tắc L'Hospital

Quy tắc này cho phép ta sử dụng đạo hàm để khử các dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$ khi tính giới hạn của hàm số. Nội dung của quy tắc này như sau:

Định lý:

Giả sử các hàm số $u(x)$ và $v(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

- Giới hạn $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$, tức là hai hàm số $u(x)$ và $v(x)$ cùng có giới hạn hoặc cùng có giới hạn vô hạn.

- Tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$ (hữu hạn hoặc vô hạn).

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

CHÚ Ý :

Trong phát biểu của định lý a có thể hữu hạn hoặc vô cùng

2.6.1.2. Các dạng vô định khác

Tất cả các dạng vô định khác đều có thể biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$

- Dạng vô định $0 \cdot \infty$ là dạng giới hạn $\lim(uv)$, trong đó hàm số $u = u(x)$ có giới hạn 0 và hàm số $v = v(x)$ có giới hạn ∞ . Trong trường hợp này ta có thể biến đổi như sau:

$$\lim(uv) = \lim \frac{u}{v^{-1}} \text{ (dạng } \frac{0}{0} \text{)} \text{ hoặc } \lim(uv) = \lim \frac{v}{u^{-1}} \text{ (dạng } \frac{\infty}{\infty} \text{)}$$

- Dạng vô định $\infty - \infty$ là dạng giới hạn $\lim(u - v)$ trong đó $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm số cùng dấu và cùng có giới hạn ∞ . Trong trường hợp này ta có thể biến đổi như sau:

$$\lim(u - v) = \lim \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{\frac{1}{uv}} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0})$$

Trường hợp u và v là các phân thức với mẫu số có giới hạn 0 ta dễ dàng biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ bằng cách quy đồng mẫu số.

- Các dạng vô định $1^\infty, 0^0$ và ∞^0 xuất hiện khi tính giới hạn của biểu thức u^v , trong đó $u = u(x) > 0$ và $v = v(x)$:
 - o nếu $u \rightarrow 1$ và $v \rightarrow \infty$ thì $\lim u^v$ có dạng vô định 1^∞
 - o nếu $u \rightarrow 0$ và $v \rightarrow 0$ thì $\lim u^v$ có dạng vô định 0^0
 - o nếu $u \rightarrow +\infty$ và $v \rightarrow 0$ thì $\lim u^v$ có dạng vô định ∞^0
 - o nếu đặt $y = u^v$ thì trong cả ba trường hợp này giới hạn của biểu thức $\ln y = v \ln u$ đều có dạng $0 \cdot \infty$ (dạng này đã được chỉ dẫn cách tính ở trên).
 - o nếu tính được $\lim(\ln y) = k$ thì ta được: $\lim y = \lim e^{\ln y} = e^k$.

2.6.2. Đạo hàm và xu hướng biến thiên của hàm số

Ta đã biết rằng hàm số $y = f(x)$ được gọi là đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trên một khoảng (a, b) nếu:

Với mọi cặp điểm x_1, x_2 thuộc (a, b) , hiệu số $f(x_2) - f(x_1)$ luôn cùng dấu (trái dấu) với $x_2 - x_1$

Nói cách khác hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trong khoảng (a, b) khi và chỉ khi:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)); \forall x_1, x_2 \in (a, b).$$

Định lý sau đây cho biết điều kiện cần để hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trong một khoảng.

Định lý:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) . Nếu $f(x)$ đơn điệu tăng (hoặc đơn điệu giảm) trong khoảng (a, b) thì $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in (a, b)$.

Chứng minh:

Giả sử $f(x)$ đơn điệu tăng trong khoảng (a, b) . Tại điểm x_0 bất kỳ thuộc khoảng (a, b) ta luôn có:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \forall x \in (a, b), x \neq x_0.$$

Từ đây suy ra: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Tương tự, nếu $f(x)$ đơn điệu giảm trong khoảng (a, b) thì tại mọi điểm $x_0 \in (a, b)$ ta luôn có:

$$f'(x_0) \leq 0.$$

Điều kiện đủ để hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trong một khoảng có nội dung như sau:

Định lý:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) . Khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trong khoảng (a, b) .
- Nếu $f'(x) = 0$ tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì $f(x)$ nhận giá trị không đổi trong khoảng (a, b) .

Chứng minh:

Với x_1, x_2 là hai điểm khác nhau bất kỳ trong khoảng (a, b) , theo công thức Lagrange ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

trong đó c là điểm nằm giữa x_1 và x_2 .

Từ đây ta suy ra rằng, nếu $f'(x) > 0$, ($f'(x) < 0$) tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì $f(x_2) - f(x_1)$ luôn luôn cùng dấu (trái dấu) với

$x_2 - x_1$. Do đó hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm trong khoảng (a, b) .

Nếu $f'(x) = 0$ tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$ ta luôn có:

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \text{ hay } f(x_1) = f(x_2).$$

Điều này chứng tỏ $f(x)$ nhận giá trị không đổi trong khoảng (a, b) .

Nhận xét:

Định lý trên cho phép ta xác định các khoảng tăng, giảm của một hàm số $f(x)$ thông qua việc xét dấu của đạo hàm $f'(x)$.

2.6.3. Cực trị của hàm số

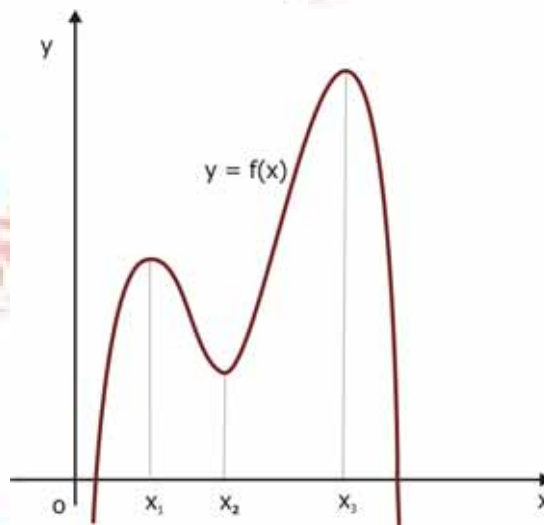
2.6.3.1. Khái niệm cực trị địa phương

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trong khoảng (a, b) . Ta nói rằng hàm số nhận giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) tại điểm $x_0 \in (a, b)$ nếu tồn tại số $\delta > 0$ đủ nhỏ sao cho bất đẳng thức $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) luôn luôn được thỏa mãn khi

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Điểm x_0 mà tại đó hàm số $f(x)$ nhận giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của nó. Điểm cực đại (điểm cực tiểu) được gọi chung là điểm cực trị của hàm số.

Việc hạn chế $|x - x_0| < \delta$, với δ đủ nhỏ có nghĩa là khái niệm cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) được hiểu theo nghĩa cực trị địa phương (còn gọi là cực trị tương đối). Theo nghĩa này, giá trị $f(x_0)$ là cực đại (cực tiểu) nếu nó lớn hơn (nhỏ hơn) tất cả các giá trị khác tại những điểm x gần x_0 . Nhìn lên đồ thị thì các điểm cực đại (cực tiểu) là các đỉnh nhô lên (thụt xuống) của đường cong $y = f(x)$. Trên hình vẽ, x_1, x_3 là các điểm cực đại, còn x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.



Hình 2.3

2.6.3.2. Điều kiện cần của cực trị

Điểm cực trị địa phương x_0 của hàm số $f(x)$ là điểm mà tại đó hàm số đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong phạm vi một khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Do đó từ định lý Fermat ta suy ra:

Định lý:

Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại hoặc cực tiểu tại điểm $x_0 \in (a, b)$ và tại đó hàm số có đạo hàm thì: $f'(x_0) = 0$.

Nhận xét:

Định lý cho biết hàm số $f(x)$ chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm thuộc một trong hai loại sau:

- Điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu (gọi là điểm dừng).
- Điểm mà tại đó hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm
- Các điểm thuộc một trong hai loại trên được gọi chung là điểm tới hạn của hàm số. Để tìm cực trị của hàm số trước hết ta tìm các điểm tới hạn (giải điều kiện cần), sau đó dùng một trong các điều kiện đủ dưới đây để kiểm tra từng điểm tới hạn.

2.6.3.3. Điều kiện đủ theo đạo hàm cấp một.

Định lý:

Giả sử điểm x_0 là một điểm tới hạn của hàm số $f(x)$ và giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ mang dấu xác định trong mỗi khoảng $(x_0 - \delta, x_0)$ và $(x_0, x_0 + \delta)$. Khi đó:

- Nếu qua điểm x_0 đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu thì hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm đó:
 - x_0 là điểm cực đại nếu $f'(x)$ đổi dấu từ + sang -
 - x_0 là điểm cực tiểu nếu $f'(x)$ đổi dấu từ - sang +
- Nếu qua x_0 đạo hàm $f'(x_0)$ không đổi dấu thì hàm số không đạt cực trị tại điểm đó.

Chứng minh:

Nếu tại điểm x_0 đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ (+) sang (-); tức là:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ và } f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Do đó, hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trong khoảng $(x_0 - \delta, x_0]$ và đơn điệu giảm trong khoảng $[x_0, x_0 + \delta)$. Từ đó suy ra $f(x) < f(x_0)$ tại mọi điểm x mà $0 < |x - x_0| < \delta$, chứng tỏ x_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Tương tự, nếu $f'(x)$ đổi dấu từ (-) sang (+) thì $f(x) > f(x_0)$ tại mọi điểm x mà $0 < |x - x_0| < \delta$, chứng tỏ x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Nếu $f'(x)$ không đổi dấu, tức là $f'(x)$ có dấu như nhau trong cả hai khoảng $(x_0 - \delta, x_0)$ và $(x_0, x_0 + \delta)$ thì hàm số $f(x)$ đơn điệu trong khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Do đó x_0 không phải điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

2.6.3.4. Điều kiện đủ theo đạo hàm cấp cao

Gọi x_0 là một điểm dừng của hàm số $f(x)$.

Định lý:

Giả sử tồn tại số tự nhiên $n \geq 2$ sao cho:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ và } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Khi đó:

- Nếu n là số chẵn thì x_0 là một điểm cực trị của hàm số $f(x)$
 - x_0 là điểm cực đại nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$
 - x_0 là điểm cực tiểu nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- Nếu n lẻ thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Chứng minh:

Với các giả thiết đã nêu, theo công thức Taylor ta có:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} \right]$$

Do $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ và do số hạng thứ hai trong dấu ngoặc vuông có giới hạn 0 khi $x \rightarrow x_0$ nên khi x đủ gần x_0 dấu của biểu thức trong dấu ngoặc vuông như dấu của $f^{(n)}(x_0)$.

Trường hợp n chẵn $(x - x_0)^n > 0$, do đó tồn tại số $\delta > 0$ sao cho khi $0 < |x - x_0| < \delta$.

Các hiệu $f(x) - f(x_0)$ cùng dấu với $f^{(n)}(x_0)$. Từ đây suy ra:

- Nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$ thì $f(x) > f(x_0)$ khi $0 < |x - x_0| < \delta$, chứng tỏ x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$ thì $f(x) < f(x_0)$ khi $0 < |x - x_0| < \delta$, chứng tỏ x_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Trường hợp n lẻ, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho trong hai khoảng $(x_0 - \delta, x_0)$ và $(x_0, x_0 + \delta)$, các hiệu $f(x) - f(x_0)$ trái dấu nhau. Điều này có nghĩa là nếu $f(x) > f(x_0)$ trong khoảng này thì $f(x) < f(x_0)$ trong khoảng kia. Do đó x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Nhận xét:

Đặc biệt, với trường hợp $n = 2$ ta có quy tắc như sau:

- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

2.6.3.5. Bài toán cực trị toàn thể

Như ta đã biết, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$; thì trên đoạn đó hàm số có giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN). Nếu hàm số đạt GTLN (GTNN) tại một điểm x_0 bên trong khoảng (a, b) thì $f(x_0)$ là một giá trị cực đại (cực tiểu). Ngoài ra, các giá trị tại đầu mút a, b cũng có thể là GTLN hoặc GTNN của hàm số. Như vậy, để tìm GTLN (GTNN) của hàm số $f(x)$, trước hết ta phải tìm tất cả các giá trị cực đại (giá trị cực tiểu), sau đó so sánh các giá trị đó cùng với các giá trị $f(a)$ và $f(b)$ để chọn ra số lớn nhất, số nhỏ nhất. Ta cũng có thể tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ bằng cách tính giá trị của nó tại tất cả các điểm tới hạn và tại hai đầu mút. Sau đó chọn ra số lớn nhất và số nhỏ nhất.

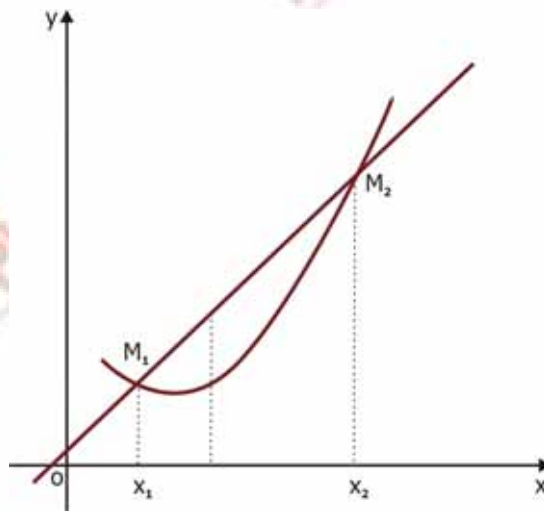
2.6.4. Liên hệ giữa đạo hàm cấp hai và tính lồi lõm của hàm số

2.6.4.1. Định nghĩa hàm số lồi và hàm số lõm

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên một khoảng (a, b) . Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lồi (lõm) trong khoảng (a, b) nếu: Với x_1, x_2 là hai điểm bất kỳ thuộc khoảng (a, b) , bất đẳng thức:

$f(tx_1 + (1-t)x_2) > (<)tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ được thỏa mãn với mọi $t \in (0, 1)$.

Dưới góc độ hình học, đường cong $y = f(x)$ được gọi là đường cong lồi (đường cong lõm) nếu mọi cung đường cong giữa hai điểm M_1, M_2 bất kỳ đều nằm phía dưới (phía trên) đoạn thẳng M_1M_2 .



Hình 2.4: Đường cong $y = f(x)$

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) thì tại mỗi điểm của đường cong $y = f(x)$ ta có thể kẻ tiếp tuyến. Có thể chứng minh được rằng:

Đường cong $y = f(x)$ là đường cong lồi (đường cong lõm) khi và chỉ khi tiếp tuyến tại mọi điểm của đường cong đó nằm phía dưới (phía trên) so với đường cong.

2.6.4.2. Liên hệ với đạo hàm cấp hai

Định lý sau đây cho phép ta sử dụng đạo hàm cấp hai để kiểm tra tính chất lồi, lõm của hàm số:

Định lý:

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng (a, b) .

Khi đó:

- Nếu hàm số $f(x)$ lồi (lõm) trong khoảng (a, b) thì $f''(x) \leq 0$ [$f''(x) \geq 0$] với mọi $x \in (a, b)$ (điều kiện cần).
- Nếu $f''(x) < 0$ [$f''(x) > 0$] với mọi $x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ là hàm lồi (hàm lõm) trong khoảng (a, b) (điều kiện đủ).

Sử dụng định lý trên ta có thể xác định các khoảng lồi, lõm của hàm số thông qua việc xét dấu của đạo hàm cấp hai.

2.6.4.3. Điểm uốn của hàm số

Một hàm số liên tục trên khoảng X có thể thay đổi hướng lồi lõm. Trong ví dụ hàm số: $f(x) = xe^x$ thay đổi hướng lồi lõm tại điểm $x = -2$.

Định nghĩa:

Điểm x_0 mà tại đó hàm số liên tục $f(x)$ thay đổi hướng lồi lõm được gọi là điểm uốn của hàm số đó.

Điểm $M_0[x_0, f(x_0)]$ tương ứng trên đồ thị là điểm nối tiếp của hai cung đường cong có hướng lồi lõm ngược nhau, được gọi là điểm uốn của đường cong liên tục $y = f(x)$

Để xác định điểm uốn của hàm số liên tục $f(x)$ ta lưu ý các mệnh đề sau:

- Nếu x_0 là điểm uốn của hàm số $f(x)$ thì $f''(x_0) = 0$, hoặc $f''(x_0)$ không tồn tại (điều kiện cần).
- Với giả thiết $f(x)$ là hàm số liên tục tại điểm x_0 , nếu đạo hàm cấp hai tồn tại trong khoảng $(x_0 - \delta, x_0), (x_0, x_0 + \delta)$ và đổi dấu khi chuyển qua x_0 thì x_0 là điểm uốn của hàm số $f(x)$ (điều kiện đủ).

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Trong bài này chúng ta đã nghiên cứu bốn vấn đề là:

- Đạo hàm, vi phân của hàm số.
- Các định lý cơ bản về hàm khả vi.
- Khai triển Taylor, Maclaurin.
- Ứng dụng của đạo hàm.

Phần đầu tiên giới thiệu về khái niệm đạo hàm, vi phân, và ứng dụng của vi phân trong tính gần đúng. Trong phần này, học viên cần nắm được cách tính đạo hàm và vi phân cấp cao của một số hàm cơ bản đã được đề cập đến. Phần các định lý cơ bản về hàm khả vi được sử dụng để giải một số bài tập mang tính lý thuyết. Ứng dụng cụ thể của đạo hàm cấp cao được trình bày trong khai triển Taylor và trường hợp đặc biệt của nó là khai triển Maclaurin. Và phần cuối bài sẽ trình bày một số ứng dụng của đạo hàm như tìm cực trị, xét tính lồi lõm của hàm số.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Đạo hàm của hàm số: định nghĩa, ý nghĩa hình học, định nghĩa đạo hàm cấp cao.
2. Vi phân của hàm số: định nghĩa, ý nghĩa hình học, định nghĩa vi phân cấp cao. Nêu ứng dụng của vi phân trong công thức tính gần đúng.
3. Quy tắc L'Hospital có thể áp dụng được cho những trường hợp nào?
4. Viết khai triển Taylor của hàm số trong lân cận của điểm x_0 .
5. Viết khai triển Maclaurin của các hàm số: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$.
6. Điều kiện cần của cực trị. Điều kiện đủ của cực trị. Quy tắc tìm cực trị của hàm số một biến số.
7. Quy tắc tìm GTLN, GTNN của hàm số trong một khoảng đóng.
8. Định lý về sự lồi, lõm, điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

BÀI TẬP

- Cho $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$. Tính $f(1), f'(1), f(a^2), f'(a^2)$.
- Chứng minh rằng hàm số $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ với C_1, C_2 là những hằng số tùy ý thỏa mãn phương trình $y'' + 3y' + 2y = 0$.
- Tính
 - $d(xe^x)$
 - $d(\sqrt{a^2 + x^2})$
 - $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
 - $d(\ln(1-x^2))$.
- Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số
 - $y = (ax + b)^\alpha$
 - $y = \alpha^{(ax+b)}$
 - $y = \sin(ax + b)$
 - $y = \cos(ax + b)$
- Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$, n nguyên dương, không có quá hai nghiệm thực phân biệt nếu n chẵn, không quá ba nghiệm thực phân biệt nếu n lẻ.
- Dùng công thức tính gần đúng $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, tính $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ và ước lượng sai số.
- Tìm GTLN, GTNN của các hàm số
 - $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35 \quad (-4 \leq x \leq 4)$.
 - $y = x^2 \ln x \quad (1 \leq x \leq e)$.
 - $y = 2 \sin x + \sin 2x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right)$.