

Author's response to the referee reports for

New stabilization criteria for time-delayed bimodal piecewise linear systems

(QNUJS-B2421)

Dear Reviewers,

We would like to thank you for the time and efforts dedicated to our manuscript as well as for your useful and constructive comments that were helpful in improving the quality of the paper.

We have carefully examined reviewers' comments and suggestions and revised the manuscript accordingly. A detailed reply to all comments can be found below this letter. For convenience, we copied the comments in *italic* font and provided our replies in sans-serif font. The changes with respect to the previous version of the paper are marked with blue color in the attached file.

We hope that the revised version satisfies all of you.

Best regards,

The Authors.

To Reviewer 1 (File name: Report_on_QNUJS-B2421)

The authors examine the stability and stabilization of time-delayed bimodal piecewise linear systems using smooth Lyapunov-Krasovskii functionals. The primary contributions are: (1) a novel stability criterion based on the proposed smooth Lyapunov-Krasovskii functional is introduced to ensure asymptotic stability in the case of zero inputs, and (2) a new condition is presented for designing linear state feedback controllers to stabilize the system. Lastly, several numerical examples demonstrate the effectiveness of the proposed methods.

We would like to thank the reviewer for pointing out our contributions. Our effort goes in the direction of exploiting the dynamical structure to come up with a new approach in solving the stability and stabilization of bimodal piecewise linear systems with time-delays.

All the proofs seem to be correct. The presentation is clear. A carefully revised version of this paper can be recommended for publication in Quy Nhon University Journal of Science with only minor checks required.

We would like to thank the reviewer for your positive comments and correction detail. Point-by-point replies can be found in this letter. By following reviewer's constructive comments, we have fixed the indicated typos and revised the paper as in the revised version. The changes with respect to the previous version of the paper are marked in [blue color](#).

Detailed comments and suggestions:

Page 1, line 5: "two folds" → "twofold".

Page 1, line 8: "than before in the literature" → "than those previously reported in the literature".

Page 1, paragraph 2, line -5: "is also using" → "also uses". Page 1, paragraph 2, line -1: "i.e Carathodory solutions" → "i.e., Carathodory solutions".

Page 2, paragraph 1, line 10: "there is a few papers" → "there are only a few papers".

- *Page 2, paragraph 1, line 25: "The symbol R is " → "Denote by R".*

- *Page 2, paragraph 2, line 16: "are followed from" → "follow from".*

- *Page 2, paragraph 2, line 26: "i.e." → "i.e.,".*

We agree with the reviewer and we have fixed all.

- *Page 3, paragraph 2: Give a proof for Lemma 1.*

We have added the proof of Lemma 1 and moved the lemma to a new section named Notations and Preliminaries, as Reviewer 2 suggested.

Page 7, paragraph 2: Fig. 3 seems to be taken from another work. It should be redone if the figure does not originally belong to the authors.

The reviewer is right. Fig. 3 was taken from the paper (13), Example 21, in the reference list. In the manuscript, I clearly mentioned and cited the paper. However, due to your mention, I have also added a phrase ["that is take from \[13\]"](#) in the revised version and added [", source](#)

in [13]" in the caption of Fig.3, to further give a detail explanation on the source of the figure. We think that this is not a serious issue regarding to copyright laws.

Page 7, paragraph 2, line -10: "Example 2 (13)" → "Example 2 13"

Sorry, we have not got your point on this comment. For the citation rules of QNU Journal of Science, superscripts must be used wherever we insert in-text citations. From our point of view, this presentation is correct. Please let me know if you still do not agree with this typo.

Finally, we would like to thank once more the reviewer for the time dedicated to our manuscript. We hope that the additional explanations satisfy the reviewer.

To Reviewer 2 (File name: Report on QNUJS-B2421-Rev 2)

Bài báo trình bày một số kết quả mới về bài toán ổn định và ổn định hóa cho hệ affine từng phần có chậm thời gian. Bằng cách cấu trúc một lớp phiếm hàm Lyapunov-Krasovskii kết hợp với kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính, tác giả/nhóm tác giả đã thiết lập được một điều kiện đủ cho tính ổn định và mở rộng một điều kiện ổn định hóa ngược cho lớp hệ xem xét. Các kết quả thu được đã được minh họa thông qua hai ví dụ số.

Đóng góp về học thuật: Theo quan điểm của người phản biện, bài báo đã đưa ra được các kết quả mới, có ý nghĩa trong lý thuyết điều khiển, lý thuyết hệ thống và có tiềm năng ứng dụng cao cho các vấn đề, hệ thống trong thực tiễn.

Tính đúng đắn của phương pháp sử dụng: Tác giả/nhóm tác giả đã phiếm hàm Lyapunov-Krasovskii kết hợp với kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính để nghiên cứu. Đây là một trong những phương pháp hiện đại và có tính hữu hiệu cao trong lý thuyết các hệ có chậm thời gian. Điểm đặc biệt là tác giả/nhóm tác giả đã đề xuất được cấu trúc đặc biệt cho lớp phiếm hàm sử dụng để vẫn giữ được tính khả vi cho lớp hàm và đối phó được/sử dụng được cho lớp hệ chuyển mạch xem xét.

Cấu trúc và trình bày của bài báo: Nhìn chung, bài báo được trình bày hợp lý, rõ ràng, có cấu trúc hợp lý, chắc chắn. Tuy nhiên, phần trình bày vẫn có một số đoạn cấu trúc chưa chắc chắn và trình bày cần thận.

Chúng tôi rất cảm ơn phản biện đã dành thời gian đọc kỹ bản thảo của bài báo, có những nhận định tích cực về việc làm của chúng tôi cũng như về những đóng góp của bài báo. Những góp ý về quan điểm trình bày, những thiếu sót của bài báo mà phản biện đã chỉ ra, chúng tôi đã xem xét, chỉnh sửa cẩn thận để nâng cao chất lượng trình bày của bài báo. Khi thực hiện chỉnh sửa, những chỗ thay đổi so với bản gửi phản biện trước đây, chúng tôi highlight bằng cách đổi màu chữ thành xanh. Hơn nữa, khi thêm bớt, sự đánh số của các phương trình cũng đã thay đổi. Trong phần trả lời chi tiết phản biện sau đây, mỗi khi chúng tôi đề cập đến số phương trình, xin vui lòng hiểu là sự đánh số cũ trong bản trước đây.

Dưới đây là nội dung trả lời của chúng tôi về các ý kiến cụ thể mà phản biện đã đặt ra.

1. Nhiều công thức trong bài báo chưa được canh hàng, canh dòng cẩn thận, vẫn còn lỗi ra và thụt vào. Để nghị tác giả chỉnh sửa các lỗi này.

Chúng tôi cảm ơn phản biện đã nhận xét về cách trình bày công thức toán nhiều dòng. Trong quá trình soạn thảo bài báo, chúng tôi đã để ý đến vấn đề này. Nếu chúng tôi dùng `begin{align} ... end{align}` để canh dòng các công thức, chúng tôi phải cắt nhỏ các dòng. Điều này tốn nhiều dòng hơn (số trang tăng lên), còn không cắt thì bị tràn lề, khá xấu. Vì vậy, chúng tôi đã chọn định dạng `begin{multiline} ... end{multiline}` để trình bày các đẳng thức toán có nhiều dòng. Cách làm này theo mặc định, dòng đầu tiên canh trái, dòng cuối cùng canh phải và các dòng còn lại ở giữa sẽ được canh giữa. Người đọc có cảm giác các dòng lồi, thụt lộn xộn. Cách trình bày này chúng tôi nghĩ cũng phổ biến trong các sách chuẩn về toán

hoặc bài báo toán học trên một số tạp chí. Tuy nhiên, phản biện đã yêu cầu nên chúng tôi đã rà soát, chỉnh sửa trong bản mới này ở những vị trí có thể làm được. Chúng tôi đã bôi xanh ở những vị trí chỉnh sửa. Hy vọng phản biện chấp nhận về cách trình bày này.

2. Để cho việc trình bày được rõ ràng hơn, bài báo nên được thêm vào 1 mục, các kiến thức chuẩn bị (Preliminaries) hoặc đính kèm vào mục 2 để tổ chức lại bài báo. Nội dung mục kiến thức chuẩn bị, gồm:

- Lemma 1;
- Lemma 2;
- Bổ đề Schur và;
- Bất đẳng thức Cauchy..

Tác giả nên cung cấp thêm phần chứng minh của Lemma 1, để người đọc có thể theo dõi và trích dẫn sau này, khi sử dụng Lemma 1.

Chúng tôi đồng ý với ý kiến của phản biện và đã thêm mục này. Theo ý kiến phản biện, chúng tôi đã thêm một mục về Notations and Preliminaries ngay sau mục Introduction trong bản chỉnh sửa lần này. Nội dung của mục này chúng tôi đưa vào đoạn Notation (của bản cũ), Lemma 1 (của bản cũ, kèm thêm chứng minh bổ sung theo yêu cầu phản biện) và Lemma 3 (Lemma 2 của bản cũ). Chúng tôi trình bày thêm Lemma 2 về bất đẳng thức Cauchy, xuất hiện trong chứng minh Theorem 1, trang 4. Chúng tôi cũng trình bày thêm Lemma 4 (nội dung của bổ đề Schur). Chúng tôi tạm thời không trình bày chứng minh BĐT Cauchy vì đây là những kết quả khá phổ biến trong Giải tích ma trận, Lý thuyết hệ điều khiển tuyến tính.

3. Phần cuối ở cột 2, trang 4, tác giả nên giải thích ký hiệu $\lambda(\cdot)$, hoặc đưa vào phần kí hiệu (notions) ở trang 2.

Chúng tôi cảm ơn ý kiến phản biện. Thực ra ký hiệu này chúng tôi đã giới thiệu ở đoạn Notation ở bản gửi phản biện.

4. Trong phần Ví dụ 2, tác giả giải thích rõ hơn “better stabilization” nghĩa là gì?

Đây là nhận định chủ quan của nhóm nghiên cứu của chúng tôi, dựa vào kiểu dáng dần về 0 của các thành phần nghiệm. Trong bài báo của Y.Iwatani and S. Hara [13], quỹ đạo nghiệm có biên dao động lớn hơn trước khi dần về 0.

5. Tác giả cần làm rõ chứng minh công thức (8). Đường như là chưa đúng.

Chúng tôi cảm ơn sự nghi ngờ của phản biện để có dịp làm sáng tỏ hơn trong trình bày. Công thức này đã được kiểm tra cẩn thận và đây là một công thức biến đổi đúng. Theo yêu cầu phản biện về trình bày rõ ràng hơn, chúng tôi đã bổ sung thêm 1 đoạn trong chứng minh để làm rõ cách biến đổi trong bản chỉnh sửa đợt này.

6. Ở công thức (10), tác giả nên cung cấp thêm chứng minh chi tiết để người đọc dễ theo dõi hơn.

Theo ý kiến phản biện, chúng tôi đã bổ sung thêm 1 đoạn trong chứng minh để làm rõ cách biến đổi trong bản chỉnh sửa đợt này.

7. Hơn nữa, phản biện có câu hỏi là trong (10), liệu có thể không dùng bất đẳng thức Cô Si được không? Vì khi không sử dụng bất đẳng thức Cô si thì vẫn đưa ra được điều kiện là các bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Nhưng việc sử dụng bất đẳng thức Cô si sẽ là tăng tính bảo thủ cho điều kiện đưa ra.

Chúng tôi đồng ý với ý kiến của phản biện. Ở biến đổi này, không dùng đến bất đẳng thức Cauchy ta vẫn có thể đưa ra được một điều kiện đủ, có thể nói là tốt hơn để xét tính ổn định. Tuy nhiên, trong nghiên cứu này, chúng tôi muốn đưa ra ma trận dạng đường chéo khối để tách bạch tính xác định âm của ma trận thu được thành tính xác định âm của hai phần độc lập nhau. Điều này sẽ thuận lợi hơn trong việc giải bài toán thiết kế điều khiển ngược cho bài toán ổn định hóa.

8. Công thức (13) không phải là bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Tác giả cần kiểm tra lại công thức này, hoặc nên phương phải giải số các điều kiện ở Định lý 2.

Ý kiến của phản biện là đúng; bất đẳng thức (13), của Theorem 2, không phải là một bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Điều này đã được chúng tôi đề cập đến trong Example 1, ở trang 7, cột 1, dòng 4 (tính từ dưới lên).

Ở đây chúng tôi muốn giải thích thêm với phản biện rằng nội dung của Theorem 2 chỉ đưa ra một kết quả mang tính lý thuyết, kiểu điều kiện đủ, có thể thực thi được: nếu ta có thể tìm được $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, U$ và γ, μ thỏa mãn các bất đẳng thức (13) và (14) thì ta sẽ thiết kế được một điều khiển ngược tuyến tính ổn định tiệm cận cho hệ thống vòng kín. Khi áp dụng thực tế, chúng ta có thể giải bằng các công cụ giải bài toán tối ưu tổng quát hơn, không nhất thiết là các kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Một trong các công cụ cũng khá phổ biến, có thể sử dụng được là: tìm nghiệm chấp nhận được dựa trên việc giải bài toán tối ưu với ràng buộc các bất đẳng thức ma trận bậc hai, áp dụng bằng cách line search và cố định $\tilde{\gamma}, \dots$ Tuy nhiên, trong nghiên cứu này chúng tôi đã giải như sau: Đầu tiên, đầu tiên cố định

$$\tilde{R} = \kappa I_n$$

với $\kappa > 0$ nào đó. Khi cố định $\tilde{R}$, hệ bất đẳng thức (13) và (14) trở thành hệ các LMIs. Ta có thể dùng kỹ thuật giải hệ các LMIs để tìm các ma trận và tham số còn lại. Nếu xảy ra trường hợp hệ LMIs tương ứng không có nghiệm, ta giảm giá trị của κ và giải lại.

Tóm lại, để giải hệ bất đẳng thức ma trận (13) và (14), chúng tôi lập thuật toán: tìm kiếm $\kappa > 0$ theo thuật toán line search với một $\kappa_0 > 0$ nào đó và giải LMIs tương ứng đến khi nào có được nghiệm cần tìm. Cách làm này chỉ mang tính kỹ thuật giải nên chúng tôi đã không

đưa vào bài báo. Nếu đưa vào ở dạng thuật toán thì phải chứng minh tính đúng đắn của nó, mà chúng tôi chưa thể chứng minh được trong trường hợp tổng quát.

Cuối cùng, chúng tôi xin cảm ơn phản biện đã dành thời gian quý giá để đọc kỹ và chỉ ra những điểm còn thiếu sót trong bản thảo bài báo. Chúng tôi đã cẩn thận xem xét chỉnh sửa, hoàn thiện bài báo và hy vọng rằng phản biện sẽ tạm hài lòng với bản chỉnh sửa này. Những ý kiến mang nội dung học thuật của phản biện chưa khắc phục được, chúng tôi sẽ ghi nhận và để ý cho những nghiên cứu tiếp theo.