

Teach and learn matrix problems with the help of maple software

Le Van Thien *

Kon Tum Community College, Vietnam

Received: 12/12/2019; Accepted: 06/02/2020

ABSTRACT

The objective of this paper is to introduce related instruction packages in maple math software to solve matrix problems, matrix determinants, and thereby build “program segments” to solve specific problems such as: product of matrix, total matrix, matrix power, matrix displacement, inverse matrix, matrix class, matrix determinant. Simultaneously, it also creates a “calculation window” to guide, illustrate, provide some important knowledge and solve problems with an aim to assisting students, teachers and lecturers more conveniently in getting accessed to the matrix problem. Since then, we can improve the quality of teaching and learning, and at the same time apply the achievements of information technology to support the innovation of teaching and learning methods under the current policy of the Party and the State.

Keywords: *Teaching and learning about mathematical operations on matrices; maple math software, instruction packages, calculation procedures.*

*Corresponding author.

Email: lethienkt2010@gmail.com

Dạy và học các bài toán về ma trận với sự hỗ trợ của phần mềm maple

Lê Văn Thiện*

Trường Cao đẳng Cộng đồng Kon Tum, Việt Nam

Ngày nhận bài: 12/12/2019; Ngày nhận đăng: 06/02/2020

TÓM TẮT

Mục tiêu của bài viết này là giới thiệu các gói lệnh liên quan trong phần mềm toán học maple để giải các bài toán trên ma trận, định thức ma trận và từ đó xây dựng các “đoạn chương trình” giải các bài toán cụ thể như: Tích ma trận, tổng ma trận, lũy thừa ma trận, chuyển vị ma trận, ma trận nghịch đảo, hạng ma trận, định thức ma trận. Đồng thời tạo ra “cửa sổ tính toán” để hướng dẫn, minh họa, cung cấp một số kiến thức quan trọng và giải quyết vấn đề nhằm giúp học sinh, sinh viên cũng như giảng viên thuận lợi hơn trong việc tiếp cận bài toán về ma trận. Từ đó có thể nâng cao chất lượng dạy và học, đồng thời vận dụng những thành tựu của công nghệ thông tin nhằm hỗ trợ đổi mới phương pháp dạy và học theo chủ trương của Đảng và Nhà nước hiện nay.

Từ khóa: *Dạy và học các bài toán về ma trận; phần mềm toán học maple, các gói lệnh, thủ tục tính toán.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các bài toán về đại số tuyến tính nói chung và bài toán về ma trận nói riêng đã từ lâu được đưa vào giảng dạy ở các trường Đại học, Cao đẳng cho các khối ngành khoa học tự nhiên, kỹ thuật, kinh tế, nông lâm,... là những bài toán được xem là khô khan và khó. Thực tế khi giảng dạy môn Toán cao cấp (trong đó có các bài toán về ma trận) cho sinh viên các lớp. Tôi nhận thấy trong quá trình học tập, sinh viên gặp nhiều khó khăn để nắm bắt được các khái niệm, các định lý, các thuật toán... trong toán học. Vì vậy việc hiểu và tính toán chính xác kết quả của các bài toán như: Xác định cơ sở và chiều của không gian, tính định thức, tìm ma trận nghịch đảo, tìm hạng ma trận, giải hệ phương trình tuyến tính,... là việc làm không hề đơn giản đối với sinh viên.

Do đó, ứng dụng một phần mềm vào giảng dạy và học tập những môn học được coi là khô

khan và khó như môn Toán là việc làm cấp thiết. Có ý nghĩa thiết thực trong việc giảng dạy của giảng viên và học tập của sinh viên hiện nay.

Trong bài viết này, Tác giả xin nêu vấn đề về “dạy và học các bài toán ma trận với sự hỗ trợ của phần mềm”. Cụ thể, ứng dụng phần mềm Maple 18 để đưa ra các gói lệnh, lập trình các đoạn code, chỉ ra phương pháp giải các bài toán trên ma trận. Sau đó ứng dụng gói maplet tạo ra giao diện tính toán trực quan cho người sử dụng.

2. NỘI DUNG

2.1. Phần mềm Toán học

Maple là một phần mềm Toán học do Đại học Tổng hợp Waterloo (Canada) xây dựng và đưa vào sử dụng năm 1985. Sau nhiều lần cải tiến và phát triển qua nhiều phiên bản khác nhau và ngày càng được hoàn thiện, hiện nay đã có phiên bản Maple 19.

*Tác giả liên hệ chính.

Email: lethienkt2010@gmail.com

Với phần mềm Maple, chúng ta có thể: Thực hiện các tính toán với khối lượng lớn, với thời gian nhanh và độ chính xác cao. Sử dụng các gói chuyên dụng của Maple để giải quyết các bài toán cụ thể như: vẽ đồ thị (gói plots), hình học giải tích (gói geometry), đại số tuyến tính (gói linalg), Giải tích (gói student), phương trình vi phân (gói DEtools), lý thuyết số (gói numtheory), Dữ liệu rời rạc (gói DiscreteTransforms),...

2.2. Sử dụng phần mềm maple trong dạy và học các bài toán về ma trận và định thức ma trận

2.2.1. Cách tạo ma trận

Để làm việc với ma trận, trước tiên ta cần nạp gói lệnh LinearAlgebra. Đầu tiên chúng ta gọi gói lệnh này bằng lệnh with. Gói này bao gồm các lệnh:

> restart;

> with (LinearAlgebra);

Muốn tạo một ma trận ta sử dụng một trong các lệnh sau đây :

- Cho m danh sách n phần tử L1, L2,..., Lm khi đó hàm matrix ([L1,L2,...,Lm]) trả về ma trận m hàng, n cột.

Ví dụ:

restart;

> with (linalg):

>

A := matrix([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- Cho danh sách m*n phần tử L khi đó hàm matrix(m,n,L) trả về ma trận m hàng, n cột.

Ví dụ:

>

B := matrix(3, 4, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]);

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

- Cho hàm 2 biến f(i, j) khi đó hàm matrix(m, n, f) trả về ma trận m hàng, n cột với f là hàm hai biến f(i, j), (i = 1,...,m; j = 1,...,n).

Ví dụ:

f := (i, j) → i + 2*j - 1;

f := (i, j) → i + 2*j - 1

> C := matrix(3, 4, f);

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Ta cũng có thể nhập ma trận trực tiếp từ menu Matrix/Insert Matrix.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix};$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

2.2.2. Kích thước và thành phần ma trận

- Hàm rowdim(M) trả về số hàng của ma trận M.

- Hàm coldim(M) trả về số cột của ma trận M.

- M [i,j] là phần tử nằm ở hàng i, cột j (phần tử thứ (i,j) của ma trận M...

Ví dụ.

>

A := matrix([[3, -2, 8, 1], [5, 2, -4, 2], [7, 8, 9, 4], [0, -2, 1, 7]]);

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

> with (linalg) : rowdim (A);

4

> coldim(A);

4

> a11 := A[1, 1];

a11 := 3

> a42 := A[4, 2];

a42 := -2

2.2.3. Các phép toán cơ bản trên ma trận

Trong phần này ta sẽ thực hiện một số phép toán cơ bản trên ma trận như:

- Phép cộng (+), trừ (-) hai ma trận: $A+B$
 $A - B$;

- Phép nhân ma trận với một số thực
 $A \cdot a$;

- Phép nhân 2 ma trận: $A \cdot B$;

- Phép lấy lũy thừa: A^n ;

- Phép lấy chuyển vị : transpose (A);

a. Phép cộng hai ma trận

- Phương pháp

Cho hai ma trận A và B có cùng cỡ mxn
 Tổng của hai ma trận A và B là một ma trận có
 cỡ mxn và được tìm theo maple như sau:

Bước 1: nhập ma trận A

Bước 2: nhập ma trận B

Bước 3: Tìm ma trận tổng bằng lệnh $A + B$ hoặc lệnh $\text{matadd}(A,B)$.

- Ví dụ:

Tìm tổng của hai ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Giải

> restart;

> with(linalg) :

$$> A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}; B := \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

> C := A + B;

$$C := \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 11 & 15 & 17 \\ 10 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

> C := matadd(A, B);

$$C := \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 11 & 15 & 17 \\ 10 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

b. Phép nhân ma trận với một số

- Phương pháp:

Tích của một số a bất kì với một ma trận
 A cỡ m x n là một ma trận cỡ m x n và có các
 phần tử bằng tích của a với các phần tử của ma
 trận A được tìm theo maple bằng lệnh
 $\text{scalarmul}(A, a)$ hoặc $A \cdot a$.

- Ví dụ

> restart;

> with(linalg) :

>

A := matrix([[1, 2, 3], [2, 3, 5], [6, 7, 2]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

> C := scalar mul(A, 2);

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 10 \\ 12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

c. Phép nhân ma trận

- Phương pháp

Cho ma trận A có cỡ mxp, ma trận B có
 cỡ pxn. Tích của hai ma trận A và B theo thứ
 tự là ma trận C có cỡ mxn được tìm theo
 Maple như sau:

Bước 1: Nhập ma trận A.

Bước 2: Nhập ma trận B.

Bước 3: Tìm ma trận tích A.B bằng lệnh
 $\text{evalm}(A \cdot B)$ hoặc lệnh $\text{multiply}(A, B)$.

* Ghi chú :

- Để thực hiện được phép nhân hai ma
 trận A và B theo thứ tự thì số hàng của ma trận
 B phải bằng số cột của ma trận A.

- Phép nhân ma trận không có tính giao
 hoán.

- Ví dụ:

>

restart; with(linalg):

A := matrix([[2, 3, 4], [1, 3, 2]]);

B := matrix([[1, 3], [2, 4], [4, 1]]);

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

> C := multiply(A, B);

$$C := \begin{bmatrix} 24 & 22 \\ 15 & 17 \end{bmatrix}$$

> E := multiply(B, A);

$$E := \begin{bmatrix} 5 & 12 & 10 \\ 8 & 18 & 16 \\ 9 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Như vậy, ma trận C là tích của ma trận A với ma trận B và E là ma trận tích của ma trận B với ma trận A, ta thấy $C \neq E$, hay phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán.

d. Phép chuyển vị của ma trận

Ta sử dụng lệnh transpose(A);

Ví dụ:

>

A := matrix([[x, y, z], [a, b, c], [3, 5, 6]]);

$$A := \begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

> C := transpose(A);

$$C := \begin{bmatrix} x & a & 3 \\ y & b & 5 \\ z & c & 6 \end{bmatrix}$$

e. Lũy thừa ma trận

Toán tử A^n cho phép ta lũy thừa bậc n của ma trận A. Hàm evalm tính toán giá trị các lũy thừa ma trận.

> A := matrix([[x, y], [a, b]]);

$$A := \begin{bmatrix} x & y \\ a & b \end{bmatrix}$$

> B := A^2;

$$B := A^2$$

> evalm(B);

$$\begin{bmatrix} x^2 + ya & xy + yb \\ ax + ba & ya + b^2 \end{bmatrix}$$

2.2.4. Định thức ma trận

- Phương pháp

- Bước 1: Nhập ma trận vuông A.

- Bước 2: Tính định thức của ma trận A bằng lệnh det(A).

Ví dụ:

Cho ma trận

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính det(A).

Giải

> restart;

> with(linalg) :

>

A := matrix([[2, 3, 0, -3, 4], [1, 2, 4, -3, 1], [0, 1, 4, 2, 5], [2, 5], [-2, 4, 5, 2, 1], [4, 3, 2, -1, 1]]);

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

> dthuc := det(A);

dthuc := -2321

2.2.5. Ma trận nghịch đảo

- Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Bước 1. Nhập ma trận vuông A.

Bước 2. Tính det(A).

- Nếu $\det(A) = 0$ thì A là ma trận suy biến.

- Nếu $\det A \neq 0$ thì tồn tại A^{-1}

Bước 3. Lập ma trận phụ hợp $P = C^t$, với

$C[i, j] = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$, M_{ij} là ma trận được lập thành từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j.

Bước 4. Tìm ma trận nghịch đảo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P.$$

Xét ví dụ

Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có).

Giải:

> restart;

> with(linalg) :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

> d := det(A);

d := 50

Ta có $\det(A) = 50 \neq 0$ nên tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1} Ta đi tìm ma trận phụ hợp P

Ta có:

$$C := \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} \\ C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} \end{bmatrix};$$

> $M_{11} := \text{delcols}(\text{delrows}(A, 1..1), 1..1);$

$$M_{11} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

> $C[1, 1] := (-1)^{1+1} \cdot \det(M_{11});$

$C_{1,1} := -6$

> $M_{12} := \text{delcols}(\text{delrows}(A, 1..1), 2..2);$

$$M_{12} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

> $C[1, 2] := (-1)^{1+2} \cdot \det(M_{12});$

$C_{1,2} := 2$

> $M_{13} := \text{delcols}(\text{delrows}(A, 1..1), 3..3);$

$$M_{13} := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

> $C[1, 3] := (-1)^{1+3} \cdot \det(M_{13});$

$C_{1,3} := 8$

> $M_{14} := \text{delcols}(\text{delrows}(A, 1..1), 4..4);$

$$M_{14} := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> $C[1, 4] := (-1)^{1+4} \cdot \det(M_{14});$

$C_{1,4} := 7$

Tương tự như trên, ta tính các C_{ij} còn lại. Cuối cùng ta được ma trận C;

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} \\ C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 8 & 7 \\ 2 & 16 & 14 & -19 \\ -4 & 18 & -28 & 13 \\ 16 & -22 & 12 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P := \text{transpose} \left(\begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} \\ C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} \end{bmatrix} \right);$$

$$P := \begin{bmatrix} -6 & 2 & -4 & 16 \\ 2 & 16 & 18 & -22 \\ 8 & 14 & -28 & 12 \\ 7 & -19 & 13 & -2 \end{bmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo của ma trận A là:

$$> AI := \frac{1}{\det(A)} \cdot P;$$

$$AI := \frac{1}{50} P$$

> MatranND := evalm(AI);

$$\text{MatranND} := \begin{bmatrix} -\frac{3}{25} & \frac{1}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{8}{25} \\ \frac{1}{25} & \frac{8}{25} & \frac{9}{25} & -\frac{11}{25} \\ \frac{4}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{14}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{7}{50} & -\frac{19}{50} & \frac{13}{50} & -\frac{1}{25} \end{bmatrix}$$

Ta có thể tìm ma trận phụ hợp của ma trận A trực tiếp bằng lệnh `adjoint(A)` như sau:

> `P := adjoint(A);`

$$P := \begin{bmatrix} -6 & 2 & -4 & 16 \\ 2 & 16 & 18 & -22 \\ 8 & 14 & -28 & 12 \\ 7 & -19 & 13 & -2 \end{bmatrix}$$

Và tính ma trận nghịch đảo trực tiếp bằng lệnh `inverse(A)` (đối với ma trận không suy biến);

> `MatranND := inverse(A);`

$$\text{MatranND} := \begin{bmatrix} -\frac{3}{25} & \frac{1}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{8}{25} \\ \frac{1}{25} & \frac{8}{25} & \frac{9}{25} & -\frac{11}{25} \\ \frac{4}{25} & \frac{7}{25} & -\frac{14}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{7}{50} & -\frac{19}{50} & \frac{13}{50} & -\frac{1}{25} \end{bmatrix}$$

2.3. Hạng của ma trận

- Phương pháp tìm hạng ma trận

Như ta đã biết, hạng của ma trận bậc thang chính bằng số hàng khác không của ma trận bậc thang và các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận. Vì vậy, để tìm hạng của ma trận A (`rank(A)`) ta dùng các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận đưa ma trận A về ma trận bậc thang tương ứng B. Khi đó, hạng của ma trận A bằng hạng của ma trận bậc thang B và bằng số hàng khác không của ma trận bậc thang B.

Trong phần này ta sẽ sử dụng lệnh `Gausselim(A)` để biến đổi ma trận A về dạng ma trận bậc thang B.

Ta cũng có thể tìm hạng của ma trận A một cách trực tiếp bằng lệnh `rank(A)`.

Xét ví dụ:

Ví dụ 1: Tìm hạng của ma trận sau:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Giải

> `restart;`

> `with(linalg):`

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix};$$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

> `B := gausselim(A);`

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta thấy ma trận B có 4 hàng khác không, vậy `rank(A) = rank(B) = 4`.

Ta cũng có thể tìm hạng của ma trận A một cách trực tiếp bằng lệnh `rank(A)` như sau:

> `r := rank(A);`

`r := 4`

Vậy ma trận A cho trên có hạng bằng 4.

Việc tìm hạng của ma trận theo toán học thông thường sẽ gặp nhiều khó khăn nếu các phần tử trong ma trận cần tìm hạng có tham số, khi đó việc tính toán sẽ phức tạp và rất dễ nhầm lẫn. Tuy nhiên, với sự hỗ trợ của Maple thì những khó khăn trên sẽ được khắc phục dễ dàng.

Ví dụ 2. Tìm hạng của ma trận sau theo λ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 11 & 5 & 8 & 12 \\ 4 & 9 & 14 & 6 & 10 & 15 \\ 5 & 11 & 17 & 7 & 12 & \lambda \end{bmatrix}$$

Giải:

> restart;

> with(linalg) :

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 11 & 5 & 8 & 12 \\ 4 & 9 & 14 & 6 & 10 & 15 \\ 5 & 11 & 17 & 7 & 12 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 11 & 5 & 8 & 12 \\ 4 & 9 & 14 & 6 & 10 & 15 \\ 5 & 11 & 17 & 7 & 12 & \lambda \end{bmatrix}$$

> B := gausselim(A);

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 18 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ ma trận bậc thang B ta có:

- Nếu $\lambda = 18$ thì $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 3$.
- Nếu $\lambda \neq 18$ thì $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 4$.

3. SỬ DỤNG CÁC GÓI LỆNH MAPLET TRONG MAPLE:

Trong phần này, ta sẽ sử dụng gói lệnh Maplet của Maple để viết các thủ tục (chương trình) giải các bài toán về ma trận như: lũy thừa của một ma trận, tích của 2 ma trận, định thức của ma trận, ma trận nghịch đảo, hạng của ma trận,... và thực hiện chúng trên cửa sổ giao diện được tạo ra.

Sau đây là một số thủ tục tính toán:

> restart;

with(Maplets[Elements]):

with(LinearAlgebra):

mtA := proc () // Thủ tục nhập ma trận A

global A;

try

while true do A :=

Student[LinearAlgebra][MatrixBuilder]();

if RowDimension(A) <> ColumnDimension(A)

then Maplets[Examples][Message]("Số hàng của mt A phải bằng số cột của mt A.\n Mời bạn lại.") else break;

end if

end do;

catch: A := Matrix(3)

end try; Maplets[Tools][Set]('nhA')(value) = A)

end proc; // Kết thúc thủ tục

mtB := proc () // Thủ tục nhập ma trận B

global B;

try

while true do B :=

Student[LinearAlgebra][MatrixBuilder]();

if RowDimension(B) <> ColumnDimension(A) then Maplets[Examples][Message]("Số hàng của mt A phải bằng số cột của mt B.\n Mời bạn nhập lại.") else break;

end if;

end do;

catch: B := Matrix(3)

end try; Maplets[Tools][Set]('nhB')(value) = B)

end proc; // Kết thúc thủ tục

MTNghich := proc () // Thủ tục tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}

local temp;

try

temp := MatrixInverse(A);

Maplets[Tools][Set]('kq')(value) = temp)

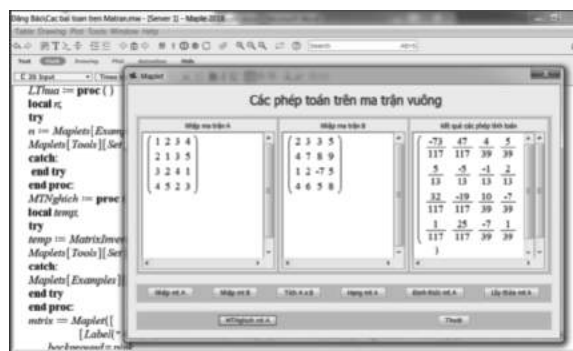
catch: Maplets[Examples][Message]("Ma tran suy bien")

end try

end proc; // kết thúc thủ tục

Các thủ tục tính toán khác, ta lập tương tự.

Khi thực hiện tính toán, ta đặt con trỏ vào vị trí bất kì trong đoạn chương trình và nhấn Enter sẽ xuất hiện một giao diện Maplet cho phép ta thực hiện phép toán cơ bản của ma trận. Trên giao diện này ta sẽ thấy kết quả trực quan và sinh động hơn.



4. TỔ CHỨC THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

4.1. Các bước tiến hành

Trong quá trình thực hiện việc sử dụng phần mềm Maple vào giảng dạy một số bài học tại trường Cao Đẳng Kinh Tế - Kỹ thuật Kon Tum (trước đây) nay là Trường Cao đẳng Cộng đồng Kon Tum tôi đã tiến hành thực nghiệm như sau:

- Nghiên cứu phần mềm Maple và tài liệu nhằm hỗ trợ trong việc soạn giảng.
- Soạn giảng và trình chiếu trên phần mềm Maple.
- Chuẩn bị trang thiết bị trang thiết bị phục vụ giảng dạy.
- Quá trình thực hiện giảng dạy tôi đã kết hợp giữa bảng phấn và trình chiếu.
- Thông qua việc dạy thử nghiệm một số lớp và được các đồng nghiệp, các sinh viên dự giờ đóng góp ý kiến và rút kinh nghiệm.

4.2. Tiến hành dạy thực nghiệm với bài toán tìm ma trận nghịch đảo

Dạy thực nghiệm bài ma trận nghịch đảo kết hợp giữa giảng dạy bảng phấn và bài soạn giảng trình chiếu trực tiếp trên phần mềm Maple với một số lớp CĐKT K05A, CĐKT K05B, CĐQTKD K05, THPT K05, CĐQTKD K06 CĐLS K10, CĐ LSK11, CĐLS K12...

Tóm tắt quá trình giảng dạy:

GV:

- Viết bảng phấn nêu khái niệm về ma trận con, ma trận phụ hợp.
- Các bước tìm ma trận nghịch đảo.
- Giải một số ví dụ cụ thể để minh họa.

SV:

- Lắng nghe, theo dõi và nêu ý kiến thắc mắc nếu chưa rõ vấn đề.

- Áp dụng lý thuyết vừa học, giải một số bài tập về ma trận nghịch đảo vào vở và có thể lên bảng giải cho các bạn theo dõi.

GV và SV:

- Sử dụng phần mềm Maple giải tuần tự các bước cùng theo dõi quá trình tính toán bằng máy và so sánh với cách giải bằng tay.

- Kiểm tra kết quả tính toán và các bước thực hiện

- Minh họa một số bài toán trên của sổ Maplet

- Tóm tắt nội dung bài học
- Làm thêm một số bài tập củng cố

4.3. Kết quả thực nghiệm:

Sau khi dạy xong mỗi lớp tôi đã tiến hành khảo sát ý kiến của sinh viên và cho làm bài kiểm tra để biết kết quả.

Nhận xét kết quả: Qua giảng dạy thử và kiểm tra một số lớp ở trường. Thông qua kết quả kiểm tra đánh giá và khảo sát thăm dò ý kiến của các sinh viên dự lớp cũng như ý kiến đóng góp của đồng nghiệp. Tôi rút ra kết quả thực nghiệm trong các giờ dạy như sau:

- Sinh viên có hứng thú hơn trong quá trình theo dõi, học tập của mình. Đồng thời có sự chủ động, tích cực hơn trong học tập cũng như giải quyết các tình huống, các bài toán đặt ra.

- Đa số sinh viên tiếp thu tốt nội dung bài học, khắc phục được tình trạng sai sót trong quá trình tính toán, nhất là với những bài toán ma trận có cấp n ($n > 4$).

- Trong một giờ giảng dạy giáo viên có thể giải quyết được rất nhiều bài toán cho kết quả nhanh chóng, chính xác. Đồng thời, có thể cho sinh viên nhận dạng được nhiều cách giải bài toán khác nhau với sự hỗ trợ của phần mềm Maple.

Từ đó, tôi nhận thấy rằng việc sử dụng công nghệ thông tin vào trong dạy học nói chung, sử dụng phần mềm toán học Maple trong dạy học toán nói riêng là cần thiết. Nếu người dạy vận dụng một cách mềm dẻo và linh hoạt khi dạy thì bài giảng sẽ hiệu quả hơn.

5. KẾT LUẬN

Bài viết đã trình bày vắn tắt quá trình dạy và

học các bài toán về ma trận với sự hỗ trợ của phần mềm maple.

- Kinh nghiệm cho thấy đối với những bài toán ma trận có cấp lớn ($n > 4$) thì việc tính bằng tay sẽ phức tạp và mất nhiều thời gian. Nhưng nếu sử dụng maple sẽ giải quyết nhanh chóng và chính xác.

- Nếu ta viết một chương trình phức tạp thì trước hết ta viết và chạy từng lệnh một để xem kết quả thế nào, khi thấy kết quả tốt ta nhóm các lệnh trên thành một chương trình hoàn chỉnh.

- Hướng nghiên cứu tiếp theo tác giả sẽ được áp dụng cho các bài toán về hệ phương trình tuyến tính, bài toán về xác suất thống kê.

Hy vọng qua bài viết này sẽ giúp cho giáo viên và học sinh, sinh viên có thêm phương pháp và tư duy mới về ứng dụng các phần mềm vào hỗ trợ dạy và học toán học hiện nay.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Quốc Chiến. *Giáo trình phần mềm toán học MAPLE*, Đại học Đà Nẵng, 2008.
2. Phạm Đức Châu. *Sử dụng Maple trong toán sơ cấp và toán cao cấp*, Nxb Khoa học và kỹ thuật Hà Nội, 2005.
3. Phạm Huy Điền. *Tính toán lập trình và Giảng dạy học toán trên Maple*, Nxb khoa học và kỹ thuật Hà Nội, 2002.
4. Phạm Huy Điền. *Dạy và học toán cùng máy tính*, Nxb Giáo dục, 2007.
5. Phạm Minh Hoàng. *Maple và Các bài toán ứng dụng*, Nxb Khoa học và kỹ thuật Hà Nội, 2008.
6. Ngô Thu Hương. *Toán cao cấp 2*, Nxb Đại học khoa học tự nhiên, 2002.
7. Nguyễn Chánh Tú. *Bài giảng Maple*, ĐHSP Huế, 2005.
8. K. H. Rosen. *Triển khai toán rời rạc với Maple*, Nxb Giao thông Vận tải, 2008.
9. Nguyễn Đình Trí. *Toán cao cấp, T1, 2, 3*, Nxb Giáo dục, 2000.
10. Lê Anh Vũ. *Đại số tuyến tính*, Nxb Giáo dục, 1997.
11. M.B. Monagan K.O.Geddes, K.M.Heal, G.Labahn, S.M.VorKoette J.Mccarron, P.DeMarco. *Maple Introductory Programming Guide*, Maplesoft, a division WaterlooMaple, 2007.
12. Martha L. Abell and James P. Braselton. *Maple By Example*, Academic press, 2005.