

Linear functional state bounding for linear discrete-time systems with delays and bounded disturbances

Luu Thi Hiep, Phan Thanh Nam*

Faculty of Mathematics and Statistics, Quy Nhon University, Vietnam

Received: 08/10/2019; Accepted: 09/11/2019

ABSTRACT

This paper presents an extended result on linear functional state bounding for linear discrete-time systems with delays and bounded disturbances. Based on the Lyapunov method, a sufficient condition for the existence of a linear functional state bounding is derived in terms of linear matrix inequalities which can be solved by many existing numerical algorithms. To increase the effectiveness of the derived condition, we propose to use an augmented Lyapunov-Krasovskii functional and its derivative is estimated by using the discrete-time Wirtinger-based inequality combined with an reciprocally convex inequality. Lastly, a numerical example is considered to illustrate the effectiveness of the obtained result.

Keywords: *State bounding, discrete time-delay systems, bounded disturbances, Lyapunov-Krasovskii functional.*

*Corresponding author:
Email: phanthanhnam@qnu.edu.vn

Chặn hàm tuyến tính của trạng thái cho hệ rời rạc có chậm và nhiễu bị chặn

Lưu Thị Hiệp, Phan Thanh Nam*

Khoa Toán và Thống kê, Trường Đại học Quy Nhơn, Việt Nam

Ngày nhận bài: 08/10/2019; Ngày nhận đăng: 09/11/2019

TÓM TẮT

Bài báo trình bày một kết quả mở rộng về chặn hàm tuyến tính trạng thái cho lớp hệ rời rạc có chậm và nhiễu bị chặn. Dựa vào phương pháp hàm Lyapunov, một điều kiện đủ cho sự tồn tại chặn cho một hàm tuyến tính có dạng xác định trước của trạng thái hệ thống được thiết lập dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính và giải được bằng các thuật toán số. Để tăng tính hữu hiệu của điều kiện đưa ra, một lớp hàm Lyapunov-Krasovskii mở rộng được thiết kế để sử dụng và đạo hàm của nó được đánh giá dựa vào hai bất đẳng thức được phát triển gần đây gồm: bất đẳng thức Wirtinger rời rạc và bất đẳng thức ma trận lỗi cải tiến. Cuối cùng, một ví dụ số được nghiên cứu để minh họa tính hữu hiệu của kết quả thu được.

Từ khóa: Chặn trạng thái, hệ rời rạc có chậm, nhiễu bị chặn, hàm Lyapunov-Krasovskii.

1. GIỚI THIỆU

Bài toán tìm chặn trạng thái/bao tập đạt được cho các hệ thống có nhiễu bị chặn được nghiên cứu đầu tiên từ những năm 1960 và đang là hướng nghiên cứu quan trọng trong lý thuyết điều khiển với những ứng dụng rộng rãi trong ước lượng trạng thái, thiết kế điều khiển.^{1–15} Trong các hệ điều khiển, thông tin/dữ liệu điều khiển và hệ thống được truyền tải qua các băng tầng kết nối. Do đó, chậm thời gian không thể tránh khỏi trong các hệ điều khiển thực tế và các lớp hệ có chậm thời gian đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu trong và ngoài nước.^{3–23} Bài toán tìm chặn trạng thái/bao tập đạt được mở rộng lần đầu tiên lên hệ có chậm lần đầu tiên trong³ và được phát triển mạnh mẽ trong những năm gần đây.^{4–15} Tập đạt được của một hệ động lực có nhiễu là tập tất cả các trạng thái mà hệ có thể đạt được xuất phát từ điểm gốc^{3,14} và nói chung là không thể tìm chính xác được tập đạt được. Do đó, người ta quan tâm đến việc tìm một tập đóng nhỏ nhất có thể bao

tập đạt được của hệ thống. Một trong những cách tiếp cận phổ biến cho bài toán bao tập đạt được cho hệ có chậm là dựa vào phương pháp hàm Lyapunov và bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Bằng cách cải tiến các lớp hàm Lyapunov, nhiều kết quả về bao tập đạt được đã được công bố.^{4–9,14,15} Để cải tiến phương pháp hàm Lyapunov, trong những năm gần đây, nhiều phát triển quan trọng đã được công bố và tập trung chủ yếu vào việc mở rộng hoặc cải tiến các bất đẳng thức Wirtinger và bất đẳng thức lỗi.^{16–23}

Để thu được bao tập đạt được nhỏ nhất, bên cạnh việc phát triển phương pháp hàm Lyapunov, thì một số kỹ thuật đánh giá trạng thái cũng được đề xuất, như chặn từng thành phần của trạng thái,^{9,12,13} chặn hàm tuyến tính trạng thái.^{8,11} Lấy ý tưởng chặn hàm tuyến tính trạng thái cho hệ vi phân từ,^{8,11} trong bài báo này chúng tôi mở rộng cho lớp hệ rời rạc. Hơn nữa, chúng tôi cũng đề xuất sử dụng một lớp hàm Lyapunov mở rộng với đạo hàm của nó được đánh giá thông qua bất đẳng thức Wirtinger bội

*Tác giả liên hệ chính:

Email: phanthanhnam@qnu.edu.vn

một và hai¹⁷ và bất đẳng thức ma trận lỗi cải tiến.²¹ Kết quả là một điều kiện đủ cho sự tồn tại một chặn trên của hàm giá trị tuyệt đối của hàm tuyến tính trạng thái được đưa ra dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính và có thể giải được bằng nhiều thuật toán số hiện nay. Cuối cùng, một ví dụ số được xem xét để minh họa tính hữu hiệu của kết quả đưa ra.

Kí hiệu: $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide n -chiều; $\mathbb{R}^{n \times m}$ là tập những ma trận cấp $n \times m$; I_n là ma trận đơn vị cấp $n \times n$; A^T là ma trận chuyển vị của A ; $*$ là phần tử đối xứng trong một ma trận đối xứng; $\text{Sym}\{X\} = X + X^T$; $P > 0$ là một ma trận đối xứng xác định dương.

2. BÀI TOÁN NGHIÊN CỨU VÀ CÁC BỔ ĐỀ BỔ TRỢ

Xét hệ rời rạc sau

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-h(k)) \\ \quad + B\omega(k), \quad k > 0, \\ x(k) \equiv 0, \quad k = -h_2, \dots, 0, \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là vectơ trạng thái, $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ và $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ là những ma trận đã biết, chậm biến thiên $h(k)$ biến đổi trong một khoảng đã biết $[h_1, h_2]$, tức là,

$$0 \leq h_1 \leq h(k) \leq h_2, \quad (2)$$

trong đó h_1, h_2 là những số nguyên đã biết. Vectơ nhiễu $\omega(k) \in \mathbb{R}^p$ được giả thiết là bị chặn:

$$\omega^T(k)\omega(k) \leq \omega_m^2, \quad \forall k \geq 0, \quad (3)$$

trong đó ω_m là một thực dương biết.

Tập đặt được cho hệ có chậm (1) có nhiều bị chặn (3) được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{R}_x := \{x(k) \in \mathbb{R}^n | x(k), \omega(k) \text{ thỏa (1) và (3)}\}. \quad (4)$$

Xét hàm tuyến tính sau:

$$z(k) = Ux(k), \quad (5)$$

trong đó $U \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ là một ma trận khác không đã cho. Mục đích bài báo này là:

(i) đưa ra một chặn trên có thể nhỏ nhất, γ , của giá trị tuyệt đối của hàm $z(k)$, tức là, $|z(k)| \leq \gamma, \forall k = 1, 2, \dots$;

(ii) áp dụng kết quả (i) thiết lập một tập đa diện bao tập đạt được (4).

Bổ đề về hàm Lyapunov mở rộng, bất đẳng thức Wirtinger rời rạc,¹⁷ bất đẳng thức lỗi phụ thuộc chậm²¹ và giá trị nhỏ nhất của một hàm hai biến lõm¹⁰ cần thiết cho việc đưa ra kết quả chính của bài báo.

Bổ đề 2.1. ⁹ Cho V là một hàm xác định dương và $V(0) = 0$. Nếu tồn tại một số $r > 1$ sao cho

$$\Delta V(k) + (1-r^{-1})V(k) - \frac{1-r^{-1}}{\omega_m^2} \omega^T(k)\omega(k) \leq 0, \quad (6)$$

thì $V(k) < 1, \forall k \geq 0$.

Bổ đề 2.2. ¹⁷ Cho một ma trận cấp $n \times n$ xác định dương R , ba số nguyên không âm đã cho a, b, k thỏa mãn $a < b \leq k$, một hàm vectơ $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ và kí hiệu $y(k) = x(k+1) - x(k)$, ta có

$$\begin{aligned} i) \quad \sum_{s=k-b}^{k-a-1} y^T(s)Ry(s) &\geq \frac{1}{b-a} (\Omega_{a,b}^0)^T R \Omega_{a,b}^0 \\ &+ \frac{3}{b-a} (\Omega_{a,b}^1)^T R \Omega_{a,b}^1 \\ &+ \frac{5}{b-a} (\Omega_{a,b}^2)^T R \Omega_{a,b}^2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} ii) \quad \sum_{s=-b}^{-a-1} \sum_{u=k+s}^{k-a-1} y^T(u)Ry(u) &\geq 2(\Omega_{a,b}^3)^T R \Omega_{a,b}^3 \\ &+ 4(\Omega_{a,b}^4)^T R \Omega_{a,b}^4, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} iii) \quad \sum_{s=-b}^{-a-1} \sum_{u=k-b}^{k+s} y^T(u)Ry(u) &\geq 2(\Omega_{a,b}^5)^T R \Omega_{a,b}^5 \\ &+ 4(\Omega_{a,b}^6)^T R \Omega_{a,b}^6. \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó

$$\Omega_{a,b}^0 = x(k-a) - x(k-b),$$

$$\Omega_{a,b}^1 = x(k-a) + x(k-b) - \frac{2}{b-a+1} \sum_{u=k-b}^{k-a} x(u),$$

$$\Omega_{a,b}^2 = x(k-a) - x(k-b)$$

$$+ \frac{6}{b-a+1} \sum_{u=k-b}^{k-a} x(u)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{12}{(b-a+2)(b-a+1)} \sum_{s=-b}^{-a} \sum_{u=k+s}^{k-a} x(u) \\
 \Omega_{a,b}^3 &= x(k-a) - \frac{1}{b-a+1} \sum_{u=k-b}^{k-a} x(u), \\
 \Omega_{a,b}^4 &= x(k-a) + \frac{2}{b-a+1} \sum_{u=k-b}^{k-a} x(u) \\
 & - \frac{6}{(b-a+2)(b-a+1)} \sum_{s=-b}^{-a} \sum_{u=k+s}^{k-a} x(u), \\
 \Omega_{a,b}^5 &= x(k-b) - \frac{1}{b-a+1} \sum_{u=k-b}^{k-a} x(u), \\
 \Omega_{a,b}^6 &= x(k-b) - \frac{4}{b-a+1} \sum_{u=k-b}^{k-a} x(u) \\
 & + \frac{6}{(b-a+2)(b-a+1)} \sum_{s=-b}^{-a} \sum_{u=k+s}^{k-a} x(u).
 \end{aligned}$$

Bổ đề 2.3. ²¹ Cho hai ma trận cấp $n \times n$, $\mathcal{R}_1 > 0$, $\mathcal{R}_2 > 0$, hai vectơ $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 \in \mathbb{R}^n$ và một số $\alpha \in (0, 1)$. Nếu tồn tại hai ma trận cấp $n \times n$, $X_1 = X_1^T, X_2 = X_2^T$ và hai ma trận cấp $n \times n$, Y_1, Y_2 sao cho

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 - X_1 & Y_1 \\ Y_1^T & \mathcal{R}_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 & Y_2 \\ Y_2^T & \mathcal{R}_2 - X_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (10)$$

thì bất đẳng thức sau đúng

$$\mathfrak{S}(t) \geq \begin{bmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \end{bmatrix}^T \mathfrak{S}_1(t) \begin{bmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

trong đó

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}(t) &= \frac{1}{\alpha} \bar{\omega}_1^T \mathcal{R}_1 \bar{\omega}_1 + \frac{1}{1-\alpha} \bar{\omega}_2^T \mathcal{R}_2 \bar{\omega}_2, \quad (12) \\
 \mathfrak{S}_1(t) &= \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 + (1-\alpha)X_1 & \alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2 \\ * & \mathcal{R}_2 + \alpha X_2 \end{bmatrix}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Bổ đề 2.4. ¹⁰ Một hàm đã cho $f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$. Giả sử rằng $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0, \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0, \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
 & \max_{(x,y) \in [a,b] \times [c,d]} f(x, y) = \\
 & \max\{f(a, c), f(a, d), f(b, c), f(b, d)\}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

3. CHẶN HÀM TUYẾN TÍNH TRẠNG THÁI

Những kí hiệu sau cần để đưa ra kết quả chính:

$$\begin{aligned}
 h_{12} &= h_2 - h_1, \mu = \max\{|\mu_1|, |\mu_2|\}, \\
 \alpha &= \frac{h(k) - h_1}{h_{12}}, \beta = \frac{h_2 - h(k)}{h_{12}}, \\
 \nu_{a,b}(k) &= \frac{1}{b-a+1} \sum_{s=k-b}^{k-a} x(s), \\
 \sigma_{a,b}(k) &= \frac{1}{(b-a+1)(b-a+2)} \times \\
 & \sum_{s=-b}^{-a} \sum_{u=k+s}^{k-a} x(u), \\
 \xi^T(k) &= \text{col}\{x(k), x(k-h_1), x(k-h(k)), \\
 & x(k-h_2), \nu_{0,h_1}(k), \nu_{h_1,h(k)}(k), \\
 & \nu_{h(k),h_2}(k), \sigma_{0,h_1}(k), \sigma_{h_1,h(k)}(k), \\
 & \sigma_{h(k),h_2}(k), x(k-h_1+1), \\
 & x(k-h_2+1), \tilde{\omega}(k)\}, \\
 e_i &= [0_{n \times (i-1)n} \quad I_n \quad 0_{n \times (13-i)n}]^T, \\
 & i = 1, \dots, 13, \\
 \tilde{\omega}(k) &= \begin{bmatrix} \omega(k) \\ 0_{(n-p) \times 1} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} B & 0_{n \times (n-p)} \end{bmatrix}, \\
 e_s &= Ae_1^T + A_d e_3^T + B_1 e_{13}^T, \\
 \eta_0(k) &= \text{col}\{x(k), x(k-h_1), x(k-h_2), \\
 & \sum_{s=k-h_1}^{k-1} x(s)\}, \\
 \eta_1(k) &= \text{col}\{\eta_0(k), \sum_{s=k-h_2}^{k-h_1-1} x(s), \\
 & \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k+s}^{k-1} x(u)\}, \\
 \eta_2(k, s) &= \text{col}\{y(s), x(s), \sum_{u=s}^{k-1} y(u)\}, \\
 \eta_3(k, s) &= \text{col}\{y(s), x(s), \sum_{u=s}^{k-h_1-1} y(u)\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_0 &= [e_s^T \quad e_{11}^T \quad e_{12}^T \quad (h_1+1)e_5^T - e_2^T]^T, \\
 \Pi_1 &= [e_1^T \quad e_2^T \quad e_4^T \quad (h_1+1)e_5^T - e_1^T]^T,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \{(h_2 - h(k) + 1)e_7^T + (h(k) - h_1 + 1)e_6^T - e_3^T - e_2^T\} \\
 & (h_1 + 1)(h_1 + 2)e_8^T - (h_1 + 1)e_1^T]^T, \\
 \Pi_2 = & [e_s^T - e_1^T \quad e_{11}^T - e_2^T \quad e_{12}^T - e_4^T \\
 & e_1^T - e_2^T \quad e_2^T - e_4^T \quad (h_1 + 1)(e_1^T - e_5^T)]^T, \\
 \Pi_3 = & [e_s^T - e_1^T \quad e_1^T \quad 0]^T, \\
 \Pi_4 = & [e_{11}^T - e_2^T \quad e_2^T \quad e_1^T - e_2^T]^T, \\
 \Pi_5 = & [0 \quad 0 \quad e_s^T - e_1^T]^T, \\
 \Pi_6 = & [e_s^T - e_{11}^T \quad (h_1 + 1)e_5^T - e_2^T \\
 & h_1e_1^T - (h_1 + 1)e_5^T + e_2^T]^T, \\
 \Pi_7 = & [e_{11}^T - e_2^T \quad e_2^T \quad 0]^T, \\
 \Pi_8 = & [e_{12}^T - e_4^T \quad e_4^T \quad e_2^T - e_4^T]^T, \\
 \Pi_9 = & [0 \quad 0 \quad e_{11}^T - e_2^T]^T, \\
 \Pi_{10} = & [e_{11}^T - e_{12}^T \quad \{(h_2 - h(k) + 1)e_7^T \\
 & + (h(k) - h_1 + 1)e_6^T - e_3^T - e_4^T\} \\
 & \{h_{12}e_2^T - (h_2 - h(k) + 1)e_7^T \\
 & - (h(k) - h_1 + 1)e_6^T + e_3^T + e_4^T\}]^T, \\
 \rho_1 = & [e_1^T - e_2^T \quad \sqrt{3}(e_1^T + e_2^T - 2e_5^T) \\
 & \sqrt{5}(e_1^T - e_2^T + 6e_5^T - 12e_8^T)]^T, \\
 \rho_2 = & [e_2^T - e_3^T \quad \sqrt{3}(e_2^T + e_3^T - 2e_6^T) \\
 & \sqrt{5}(e_2^T - e_3^T + 6e_6^T - 12e_9^T)]^T, \\
 \rho_3 = & [e_3^T - e_4^T \quad \sqrt{3}(e_3^T + e_4^T - 2e_7^T) \\
 & \sqrt{5}(e_3^T - e_4^T + 6e_7^T - 12e_{10}^T)]^T, \\
 \rho_4 = & [\sqrt{2}(e_1^T - e_5^T) \quad 2(e_1^T + 2e_5^T - 6e_8^T)]^T, \\
 \rho_5 = & [\sqrt{2}(e_2^T - e_5^T) \quad 2(e_2^T - 4e_5^T + 6e_8^T)]^T, \\
 \rho_6 = & [\sqrt{2}(e_2^T - e_6^T) \quad 2(e_2^T + 2e_6^T - 6e_9^T)]^T, \\
 \rho_7 = & [\sqrt{2}(e_3^T - e_7^T) \quad 2(e_3^T + 2e_7^T - 6e_{10}^T)]^T, \\
 \rho_8 = & [\sqrt{2}(e_3^T - e_6^T) \quad 2(e_3^T - 4e_6^T + 6e_9^T)]^T, \\
 \rho_9 = & [\sqrt{2}(e_4^T - e_7^T) \quad 2(e_4^T - 4e_7^T + 6e_{10}^T)]^T, \\
 \rho_{10} = & [\rho_2^T \quad \rho_3^T]^T, \quad \rho_{11} = e_s - e_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_1 = & \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 + (1 - \alpha)X_1 & \alpha Y_1 + (1 - \alpha)Y_2 \\ * & \tilde{R}_2 + \alpha X_2 \end{bmatrix}, \\
 \tilde{R}_1 = & \text{diag}\{R_i, R_i, R_i\}, \quad i = 1, 2, \\
 \tilde{Z}_j = & \text{diag}\{Z_j, Z_j, Z_j\}, \quad j = 3, 4, \\
 \tilde{Z}_l = & \text{diag}\{Z_l, Z_l\}, \quad l = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

Định lý 3.1. Giả sử tồn tại hai số thực $r > 1$, $\beta > 0$, một ma trận cấp $6n \times 6n$, $P > 0$, hai ma trận cấp $3n \times 3n$, $Q > 0$, $S > 0$, sáu ma trận cấp $n \times n$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $Z_1 > 0$, $Z_2 > 0$, $Z_3 > 0$, $Z_4 > 0$, hai ma trận đối xứng cấp $3n \times 3n$, X_i , $i = 1, 2$, hai ma trận cấp $3n \times 3n$, Y_i , $i = 1, 2$, sao cho những bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau đúng

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_2 + \tilde{Z}_3 - X_1 & Y_1 \\ * & \tilde{R}_2 + \tilde{Z}_4 \end{bmatrix} > 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_2 + \tilde{Z}_3 & Y_2 \\ * & \tilde{R}_2 + \tilde{Z}_4 - X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad (16)$$

$$\bar{\Omega}(h(k)) < 0, \quad \forall h(k) \in \{h_1, h_2\}, \quad (17)$$

thì giá trị tuyệt đối của $z(k)$ bị chặn trên bởi $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$, tức là, $|z(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}} := \gamma$, $\forall k = 1, 2, \dots$, trong đó

$$\begin{aligned}
 \bar{\Omega}(h(k)) = & \Psi_1(h(k)) - \Psi_2(h(k)), \\
 \Psi_1(h(k)) = & \beta e_s^T U^T U e_s - \beta r^{-1} e_1^T U^T U e_1 \\
 & + \text{Sym}\{\Pi_1^T P \Pi_2 + \Pi_6^T Q \Pi_5 + r^{-h_1} \Pi_{10}^T S \Pi_9\} \\
 & + \Pi_2^T P \Pi_2 + (1 - r^{-1}) \Pi_1^T P \Pi_1 + \Pi_3^T Q \Pi_3 \\
 & - r^{-h_1} \Pi_4^T Q \Pi_4 + \frac{r^{-h_1} - 1}{r^{-1} - 1} \Pi_5^T Q \Pi_5 \\
 & + r^{-h_1} \Pi_7^T S \Pi_7 - r^{-h_2} \Pi_8^T S \Pi_8 \\
 & + \frac{r^{-h_2} - r^{-h_1}}{r^{-1} - 1} \Pi_9^T S \Pi_9 + h_1^2 \rho_{11}^T R_1 \rho_{11} \\
 & + h_{12}^2 \rho_{11}^T R_2 \rho_{11} + \frac{h_1(h_1 + 1)}{2} \rho_{11}^T (Z_1 + Z_2) \rho_{11} \\
 & + \frac{h_{12}(h_{12} + 1)}{2} \rho_{11}^T (Z_3 + Z_4) \rho_{11} - \frac{1 - r^{-1}}{\omega_m^2} I_p \\
 \Psi_2(h(k)) = & r^{-h_1} \rho_1^T \tilde{R}_1 \rho_1 + r^{-h_1} \rho_4^T \tilde{Z}_1 \rho_4 \\
 & + r^{-h_1} \rho_5^T \tilde{Z}_2 \rho_5 + r^{-h_2} \rho_6^T \tilde{Z}_3 \rho_6 \\
 & + r^{-h_2} \rho_7^T \tilde{Z}_3 \rho_7 + r^{-h_2} \rho_8^T \tilde{Z}_4 \rho_8 \\
 & + r^{-h_2} \rho_9^T \tilde{Z}_4 \rho_9 + r^{-h_2} \rho_{10}^T \Theta_1 \rho_{10}.
 \end{aligned}$$

Chứng minh. Xét hàm Lyapunov-Krasovskii sau:

$$V(k) = \sum_{i=0}^5 V_i(k) \quad (18)$$

trong đó

$$\begin{aligned} V_0(k) &= \beta x^T(k) U^T U x(k), \\ V_1(k) &= \eta_1^T(k) P \eta_1(k), \\ V_2(k) &= \sum_{s=k-h_1}^{k-1} r^{1+s-k} \eta_2^T(k, s) Q \eta_2(k, s) \\ &\quad + \sum_{s=k-h_2}^{k-h_1-1} r^{1+s-k} \eta_3^T(k, s) S \eta_3(k, s), \\ V_3(k) &= h_1 \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k+s}^{k-1} r^{1+u-k} y^T(u) R_1 y(u) \\ &\quad + h_{12} \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{u=k+s}^{k-1} r^{1+u-k} y^T(u) R_2 y(u), \\ V_4(k) &= \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=s}^{-1} \sum_{v=k+u}^{k-1} r^{1+v-k} y^T(v) Z_1 y(v) \\ &\quad + \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=-h_1}^s \sum_{v=k+u}^{k-1} r^{1+v-k} y^T(v) Z_2 y(v), \\ V_5(k) &= \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{u=s}^{-h_1-1} \sum_{v=k+u}^{k-1} r^{1+v-k} y^T(v) Z_3 y(v) \\ &\quad + \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{u=-h_2}^s \sum_{v=k+u}^{k-1} r^{1+v-k} y^T(v) Z_4 y(v), \end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có

$$V(k) \geq V_0(k) \geq \beta |z(k)|^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Tính sai phân của V , ta thu được

$$\begin{aligned} \Delta V_0(k) &= V_0(k+1) - V_0(k) \\ &\quad + (1-r^{-1})V_0(k) + (r^{-1}-1)V_0(k) \\ &= V_0(k+1) - r^{-1}V_0(k) + (r^{-1}-1)V_0(k) \\ &= \beta x^T(k+1) U^T U x(k+1) \\ &\quad - r^{-1} \beta x^T(k) U^T U x(k) \\ &\quad + (r^{-1}-1)V_0(k) \\ \Delta V_1(k) &= \Delta \eta_1^T(k) P \Delta \eta_1(k) + 2 \Delta \eta_1^T(k) P \eta_1(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad + (1-r^{-1})\eta_1^T(k) P \eta_1(k) \\ &\quad + (r^{-1}-1)V_1(k), \\ \Delta V_2(k) &= V_2(k+1) - V_2(k) \\ &\quad + (1-r^{-1})V_2(k) + (r^{-1}-1)V_2(k) \\ &= \sum_{s=k-h_1+1}^k r^{s-k} \eta_2^T(k+1, s) Q \eta_2(k+1, s) \\ &\quad + \sum_{s=k-h_2+1}^{k-h_1} r^{s-k} \eta_3^T(k+1, s) S \eta_3 \\ &\quad (k+1, s) - r^{-1}V_2(k) + (r^{-1}-1)V_2(k). \end{aligned}$$

Hai vectơ $\eta_2(k+1, s)$, $\eta_3(k+1, s)$ được viết lại như sau:

$$\eta_2(k+1, s) = \bar{\eta}_2(k) + \eta_2(k, s) \quad (20)$$

$$\eta_3(k+1, s) = \bar{\eta}_3(k) + \eta_3(k, s) \quad (21)$$

trong đó

$$\bar{\eta}_2(k) = [0 \ 0 \ y^T(k)]^T, \quad \bar{\eta}_3(k) = [0 \ 0 \ y^T(k-h_1)]^T.$$

Sử dụng (20) và (21), ta có

$$\begin{aligned} \Delta V_2(k) &= \sum_{s=k-h_1+1}^k r^{s-k} \bar{\eta}_2^T(k) Q \bar{\eta}_2(k) \\ &\quad + \sum_{s=k-h_1+1}^k r^{s-k} \eta_2^T(k, s) Q \eta_2(k, s) \\ &\quad + 2 \sum_{s=k-h_1+1}^k r^{s-k} \eta_2^T(k, s) Q \bar{\eta}_2(k) \\ &\quad + \sum_{s=k-h_2+1}^{k-h_1} r^{s-k} \bar{\eta}_3^T(k) S \bar{\eta}_3(k) \\ &\quad + \sum_{s=k-h_2+1}^{k-h_1} r^{s-k} \eta_3^T(k, s) S \eta_3(k, s) \\ &\quad + 2 \sum_{s=k-h_2+1}^{k-h_1} r^{s-k} \eta_3^T(k, s) S \bar{\eta}_3(k) \\ &\quad - \sum_{s=k-h_1}^{k-1} r^{s-k} \eta_2^T(k, s) Q \eta_2(k, s) \\ &\quad - \sum_{s=k-h_2}^{k-h_1-1} r^{s-k} \eta_3^T(k, s) S \eta_3(k, s) \\ &\quad + (r^{-1}-1)V_2(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r^{-h_1} - 1}{r^{-1} - 1} \bar{\eta}_2^T(k) Q \bar{\eta}_2(k) + \eta_2^T(k, k) Q \eta_2(k, k) \\
&\quad - r^{-h_1} \eta_2^T(k, k - h_1) Q \eta_2(k, k - h_1) \\
&\quad + 2 \sum_{s=k-h_1+1}^k r^{s-k} \eta_2^T(k, s) Q \bar{\eta}_2(k) \\
&\quad + \frac{r^{-h_2} - r^{-h_1}}{r^{-1} - 1} \bar{\eta}_3^T(k) S \bar{\eta}_3(k) \\
&\quad + r^{-h_1} \eta_3^T(k, k - h_1) S \eta_3(k, k - h_1) \\
&\quad - r^{-h_2} \eta_3^T(k, k - h_2) S \eta_3(k, k - h_2) \\
&\quad + 2 \sum_{s=k-h_2+1}^{k-h_1} r^{s-k} \eta_3^T(k, s) S \bar{\eta}_3(k) \\
&\quad + (r^{-1} - 1) V_2(k) \\
&\leq \frac{r^{-h_1} - 1}{r^{-1} - 1} \bar{\eta}_2^T(k) Q \bar{\eta}_2(k) + \eta_2^T(k, k) Q \eta_2(k, k) \\
&\quad - r^{-h_1} \eta_2^T(k, k - h_1) Q \eta_2(k, k - h_1) \\
&\quad + 2 \sum_{s=k-h_1+1}^k \eta_2^T(k, s) Q \bar{\eta}_2(k) \\
&\quad + \frac{r^{-h_2} - r^{-h_1}}{r^{-1} - 1} \bar{\eta}_3^T(k) S \bar{\eta}_3(k) \\
&\quad + r^{-h_1} \eta_3^T(k, k - h_1) S \eta_3(k, k - h_1) \\
&\quad - r^{-h_2} \eta_3^T(k, k - h_2) S \eta_3(k, k - h_2) \\
&\quad + 2r^{-h_1} \sum_{s=k-h_2+1}^{k-h_1} \eta_3^T(k, s) S \bar{\eta}_3(k) \\
&\quad + (r^{-1} - 1) V_2(k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_3(k) &= V_3(k+1) - V_3(k) \\
&\quad + (1 - r^{-1}) V_3(k) + (r^{-1} - 1) V_3(k) \\
&= h_1 \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k+s+1}^k r^{u-k} y^T(u) R_1 y(u) \\
&\quad + h_{12} \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{u=k+s+1}^k r^{u-k} y^T(u) R_2 y(u) \\
&\quad - h_1 \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k+s}^{k-1} r^{u-k} y^T(u) R_1 y(u) \\
&\quad - h_{12} \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{u=k+s}^{k-1} r^{u-k} y^T(u) R_2 y(u) \\
&\quad + (r^{-1} - 1) V_3(k) \\
&= h_1^2 y^T(k) R_1 y(k) + h_{12}^2 y^T(k) R_2 y(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-h_1 \sum_{s=k-h_1}^{k-1} r^{s-k} y^T(s) R_1 y(s) \\
&-h_{12} \sum_{s=k-h_2}^{k-h_1-1} r^{s-k} y^T(s) R_2 y(s) \\
&\quad + (r^{-1} - 1) V_3(k) \\
&\leq h_1^2 y^T(k) R_1 y(k) + h_{12}^2 y^T(k) R_2 y(k) \\
&\quad - r^{-h_1} h_1 \sum_{s=k-h_1}^{k-1} y^T(s) R_1 y(s) \\
&\quad - r^{-h_2} h_{12} \sum_{s=k-h_2}^{k-h(k)-1} y^T(s) R_2 y(s) \\
&\quad - r^{-h_2} h_{12} \sum_{s=k-h(k)}^{k-h_1-1} y^T(s) R_2 y(s) \\
&\quad + (r^{-1} - 1) V_3(k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_4 &= V_4(k+1) - V_4(k) \\
&\quad + (1 - r^{-1}) V_4(k) + (r^{-1} - 1) V_4(k) \\
&= \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=s}^{-1} \sum_{v=k+u+1}^k r^{v-k} y^T(v) Z_1 y(v) \\
&\quad + \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=-h_1}^s \sum_{v=k+u+1}^k r^{v-k} y^T(v) Z_2 y(v) \\
&\quad - \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=s}^{-1} \sum_{v=k+u}^{k-1} r^{v-k} y^T(v) Z_1 y(v) \\
&\quad - \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=-h_1}^s \sum_{v=k+u}^{k-1} r^{v-k} y^T(v) Z_2 y(v) \\
&\quad + (r^{-1} - 1) V_4(k) \\
&= \frac{h_1(h_1+1)}{2} y^T(k) (Z_1 + Z_2) y(k) \\
&\quad - \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k+s}^{k-1} r^{u-k} y^T(u) Z_1 y(u) \\
&\quad - \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k-h_1}^{k+s} r^{u-k} y^T(u) Z_2 y(u) \\
&\quad + (r^{-1} - 1) V_4(k) \\
&\leq \frac{h_1(h_1+1)}{2} y^T(k) (Z_1 + Z_2) y(k) \\
&\quad - r^{-h_1} \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k+s}^{k-1} y^T(u) Z_1 y(u)
\end{aligned}$$

$$-r^{-h_1} \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k-h_1}^{k+s} y^T(u) Z_2 y(u) \\ + (r^{-1} - 1) V_4(k),$$

$$-r^{-h_2} \sum_{s=-h(k)}^{-h_1-1} \sum_{u=k-h(k)}^{k+s} y^T(u) Z_4 y(u) \\ + (r^{-1} - 1) V_5(k).$$

Do đó, ta thu được

$$\begin{aligned} \Delta V_5(k) &= V_5(k+1) - V_5(k) \\ &+ (1 - r^{-1}) V_5(k) + (r^{-1} - 1) V_5(k) \\ &= \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{u=s}^{-h_1-1} \sum_{v=k+u+1}^k r^{v-k} y^T(v) Z_3 y(v) \\ &+ \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{u=-h_2}^s \sum_{v=k+u+1}^k r^{v-k} y^T(v) Z_4 y(v) \\ &- \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{u=s}^{-h_1-1} \sum_{v=k+u}^{k-1} r^{v-k} y^T(v) Z_3 y(v) \\ &- \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{u=-h_2}^s \sum_{v=k+u}^{k-1} r^{v-k} y^T(v) Z_4 y(v) \\ &+ (r^{-1} - 1) V_5(k) \\ &= \frac{h_{12}(h_{12} + 1)}{2} y^T(k) (Z_3 + Z_4) y(k) \\ &- \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{u=k+s}^{k-h_1-1} r^{u-k} y^T(u) Z_3 y(u) \\ &- \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1} \sum_{u=k-h_2}^{k+s} r^{u-k} y^T(u) Z_4 y(u) \\ &+ (r^{-1} - 1) V_5(k) \\ &\leq \frac{h_{12}(h_{12} + 1)}{2} y^T(k) (Z_3 + Z_4) y(k) \\ &- r^{-h_2} \sum_{s=-h_2}^{-h(k)-1} \sum_{u=k+s}^{k-h(k)-1} y^T(u) Z_3 y(u) \\ &- r^{-h_2} (h_2 - h(k)) \sum_{u=k-h(k)}^{k-h_1-1} y^T(u) Z_3 y(u) \\ &- r^{-h_2} \sum_{s=-h(k)}^{-h_1-1} \sum_{u=k+s}^{k-h_1-1} y^T(u) Z_3 y(u) \\ &- r^{-h_2} \sum_{s=-h_2}^{-h(k)-1} \sum_{u=k-h_2}^{k+s} y^T(u) Z_4 y(u) \\ &- r^{-h_2} (h(k) - h_1) \sum_{u=k-h_2}^{k-h(k)-1} y^T(u) Z_4 y(u) \\ &- r^{-h_2} \sum_{s=-h_2}^{-h(k)-1} \sum_{u=k-h_2}^{k+s} y^T(u) Z_4 y(u) \\ &- r^{-h_2} (h(k) - h_1) \sum_{u=k-h_2}^{k-h(k)-1} y^T(u) Z_4 y(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &+ (1 - r^{-1}) V(k) \\ &- \frac{1 - r^{-1}}{\omega_m^2} \omega^T(k) \omega(k) \\ &\leq \xi^T(t) \Psi_1(h(k)) \xi(t) \\ &- r^{-h_1} h_1 \sum_{s=k-h_1}^{k-1} y^T(s) R_1 y(s) \\ &- r^{-h_2} h_{12} \sum_{s=k-h_2}^{k-h(k)-1} y^T(s) R_2 y(s) \\ &- r^{-h_2} h_{12} \sum_{s=k-h(k)}^{k-h_1-1} y^T(s) R_2 y(s) \\ &- r^{-h_1} \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k+s}^{k-1} y^T(u) Z_1 y(u) \\ &- r^{-h_1} \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k-h_1}^{k+s} y^T(u) Z_2 y(u) \\ &- r^{-h_2} \sum_{s=-h_2}^{-h(k)-1} \sum_{u=k+s}^{k-h(k)-1} y^T(u) Z_3 y(u) \\ &- r^{-h_2} (h_2 - h(k)) \sum_{u=k-h(k)}^{k-h_1-1} y^T(u) Z_3 y(u) \\ &- r^{-h_2} \sum_{s=-h(k)}^{-h_1-1} \sum_{u=k+s}^{k-h_1-1} y^T(u) Z_3 y(u) \\ &- r^{-h_2} \sum_{s=-h_2}^{-h(k)-1} \sum_{u=k-h_2}^{k+s} y^T(u) Z_4 y(u) \\ &- r^{-h_2} (h(k) - h_1) \sum_{u=k-h_2}^{k-h(k)-1} y^T(u) Z_4 y(u) \\ &- r^{-h_2} \sum_{s=-h(k)}^{-h_1-1} \sum_{u=k-h(k)}^{k+s} y^T(u) Z_4 y(u) \end{aligned}$$

Bằng việc sử dụng bất đẳng thức trong Bổ đề

2.2 với $\alpha = \frac{h(k)-h_1}{h_{12}}$, $\beta = \frac{h_2-h(k)}{h_{12}}$, ta có

$$\begin{aligned} & -r^{-h_1} h_{11} \sum_{s=k-h_1}^{k-1} y^T(s) R_1 y(s) \\ & \leq \xi^T(k) \{-\rho_1^T r^{-h_1} \tilde{R}_1 \rho_1\} \xi(k), \\ & -r^{-h_2} h_{12} \sum_{s=k-h(k)}^{k-h_1-1} y^T(s) R_2 y(s) \\ & \leq -r^{-h_2} \frac{1}{\alpha} \xi^T(k) \{\rho_2^T \tilde{R}_2 \rho_2\} \xi(k), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & -r^{-h_2} h_{12} \sum_{s=k-h_2}^{k-h(k)-1} y^T(s) R_2 y(s) \\ & \leq -r^{-h_2} \frac{1}{\beta} \xi^T(k) \{\rho_3^T \tilde{R}_2 \rho_3\} \xi(k), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & -r^{-h_2} (h_2 - h(k)) \sum_{s=k-h(k)}^{k-h_1-1} y^T(u) Z_3 y(u) \\ & \leq -r^{-h_2} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \xi^T(k) \{\rho_2^T \tilde{Z}_3 \rho_2\} \xi(k), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & -r^{-h_2} (h(k) - h_1) \sum_{s=k-h_2}^{k-h(k)-1} y^T(u) Z_4 y(u) \\ & \leq -r^{-h_2} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \xi^T(k) \{\rho_3^T \tilde{Z}_4 \rho_3\} \xi(k), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & -r^{-h_1} \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k+s}^{k-1} y^T(u) Z_1 y(u) \\ & \leq \xi^T(k) \{-\rho_4^T r^{-h_1} \tilde{Z}_1 \rho_4\} \xi(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -r^{-h_1} \sum_{s=-h_1}^{-1} \sum_{u=k-h_1}^{k+s} y^T(u) Z_2 y(u) \\ & \leq \xi^T(k) \{-\rho_5^T r^{-h_1} \tilde{Z}_2 \rho_5\} \xi(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -r^{-h_2} \sum_{s=-h(k)}^{-h_1-1} \sum_{u=k+s}^{k-h_1-1} y^T(u) Z_3 y(u) \\ & \leq \xi^T(k) \{-\rho_6^T r^{-h_2} \tilde{Z}_3 \rho_6\} \xi(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -r^{-h_2} \sum_{s=-h_2}^{-h(k)-1} \sum_{u=k+s}^{k-h(k)-1} y^T(u) Z_3 y(u) \end{aligned}$$

$$\leq \xi^T(k) \{-\rho_7^T r^{-h_2} \tilde{Z}_3 \rho_7\} \xi(k),$$

$$\begin{aligned} & -r^{-h_2} \sum_{s=-h(k)}^{-h_1-1} \sum_{u=k-h(k)}^{k+s} y^T(u) Z_4 y(u) \\ & \leq \xi^T(k) \{-\rho_8^T r^{-h_2} \tilde{Z}_4 \rho_8\} \xi(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -r^{-h_2} \sum_{s=-h_2}^{-h(k)-1} \sum_{u=k-h_2}^{k+s} y^T(u) Z_4 y(u) \\ & \leq \xi^T(k) \{-\rho_9^T r^{-h_2} \tilde{Z}_4 \rho_9\} \xi(k), \end{aligned}$$

Từ (22)-(25), sử dụng Bổ đề 2.3, ta có

$$\begin{aligned} & r^{-h_2} \xi^T(k) \left\{ -\frac{1}{\alpha} \rho_2^T (\tilde{R}_2 + \tilde{Z}_3) \rho_2 - \frac{1}{\beta} \rho_3^T (\tilde{R}_2 \right. \\ & \left. + \tilde{Z}_4) \rho_3 + \begin{bmatrix} \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{Z}_3 & 0 \\ 0 & \tilde{Z}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} \right\} \xi(k) \\ & \leq \xi^T(k) \left\{ -r^{-h_2} \rho_{10}^T \Theta_1 \rho_{10} \right\} \xi(k). \end{aligned}$$

Từ trên, ta thu được

$$\begin{aligned} & \Delta V(k) + (1 - r^{-1}) V(k) - \frac{1 - r^{-1}}{\omega_m^2} \omega^T(k) \omega(k) \\ & \leq \xi^T(k) \bar{\Omega}(h(k)) \xi(k) < 0. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 2.1, ta có $V(k) < 1$, $\forall k \geq 0$. Kết hợp bất đẳng thức này với (19), ta thu được:

$$|z(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 3.1. (i) Định lý 3.1 đưa ra chặn hàm tuyến tính trạng thái $z(k) = Ux(k)$. Điều này kéo theo rằng tập đạt được của hệ thống được bao bởi một dải xác định bởi hai nửa không gian có cùng pháp véc tơ U . Do đó, bằng cách chọn một số hữu hạn các véc tơ U và giao các dải chặn hàm tuyến tính trạng thái tương ứng, ta sẽ thu được một đa diện lồi bao tập đạt được của hệ thống.

(ii) Nếu ta chọn U là các véc tơ đơn vị thứ i trong $\mathbb{R}^n$, tức là

$$U = [0 \quad 0 \quad \overbrace{1}^{\text{vị trí } i} \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

thì ta sẽ thu được chặn từng thành phần $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ của vec tơ trạng thái $x(t)$. Và kết quả là ta thu được một hình hộp bao tập đạt được của hệ thống.

(iii) Nếu thay tích $U^T U$ bằng một ma trận xác định dương P_0 , thì Định lý 3.1, ta sẽ cho điều kiện đủ để bao tập đạt được bằng hình elipxoit $\epsilon(P_0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_0 x \leq 1\}$. Giao hình đa diện thu được ở (i) với elipxoit $\epsilon(P_0, 1)$, ta thu được một bao tập đạt được nhỏ hơn.

4. VÍ DỤ SỐ

Ví dụ 4.1. Xét hệ (1) với những ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.01 \\ -0.5 & 0.09 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.02 & 0 \\ -0.1 & -0.01 \end{bmatrix},$$

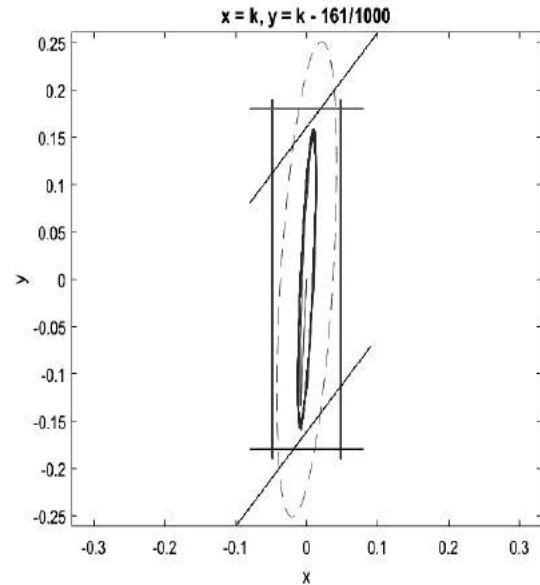
$$B = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.15 \end{bmatrix}, \quad h(k) \in [0, 15] \text{ và } \omega(k) = \sin(7k).$$

Trong ví dụ này chúng tôi tìm chặn cho 3 hàm tuyến tính trạng thái $|z_i(k)| = |U_i x(k)|$, $i = 1, 2, 3$ với $U_1 = [1 \ 0]$, $U_2 = [0 \ 1]$ và $U_3 = [-1 \ 1]$. Giải LMIs (15)-(17) của Định lý 3.1, các chặn trên cho ba hàm tuyến tính thu được là: $|z_1(k)| \leq 0.048$ tại $r = 1.17$, $|z_2(k)| \leq 0.180$ tại $r = 169.6$, $|z_3(k)| \leq 0.161$ tại $r = 112.75$. Bảng 1 chỉ ra rằng các chặn thu được bởi phương pháp đã trình bày nhỏ hơn các chặn thu được bởi phương pháp trong⁹. Hơn nữa, phương pháp trong⁹ là không khả thi với trường hợp thứ ba. Điều này chứng tỏ phương pháp đưa ra của chúng tôi là hữu hiệu hơn phương pháp trong⁹.

Bảng 1. Các chặn tính được

Phương pháp	$ z_1(k) $	$ z_2(k) $	$ z_3(k) $
Định lý 3.1 ⁹	0.060	0.48	-
Định lý 3.1	0.048	0.18	0.161

Mặt khác, Hình 1 cũng chỉ ra rằng khi lấy giao của hình elipxoit với 3 dải (dải đứng chặn $z_1 = x_1$, dải ngang chặn $z_2 = x_2$ và dải xiên chặn z_3 , ta thu được một tập nhỏ hơn hình elipxoit bao tập đạt được của hệ thống.



Hình 1. Quỹ đạo hệ thống và các chặn

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. J. Abegor, K. Nagpal, K. Poolla. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **1996**, 6, 899-927.
2. C. Durieu, E. Walter, B. Polyak. Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding, *J. Optim. Theory Appl.*, **2001**, 111, 273-303.
3. E. Fridman, U. Shaked. On reachable sets for linear systems with delay and bounded peak inputs, *Automatica*, **2003**, 39, 2005-2010.
4. J.H. Kim. Improved ellipsoidal bound of reachable sets for time-delayed linear systems with disturbances, *Automatica*, **2008**, 44, 2940-2943.
5. O.M. Kwon, S.M. Lee, J.H. Park. On the reachable set bounding of uncertain dynamic systems with time-varying delays and disturbances, *Inf. Sci.*, **2011**, 181, 3735-3748.
6. P.T. Nam, P.N. Pathirana. Further result on reachable set bounding for linear uncertain polytopic systems with interval time-varying delays, *Automatica*, **2011**, 47, 1838-1841.

7. Z. Feng, W.X. Zheng. Improved reachable set estimation of discrete-time systems with time-varying delay, *Optim Control Appl Meth.*, **2017**, 38(6), 1081-1090.
8. P.T. Nam, P.N. Pathirana, H. Trinh. Linear functional state bounding for perturbed time-delay systems and its application, *IMA J. Math. Control Inf.*, **2015**, 32(2), 245-255.
9. N.D. That, P.T. Nam, Q.P. Ha. Reachable set bounding for linear discrete-time systems with delays and bounded disturbances, *J. Optim. Theory Appl.*, **2013**, 157, 96-107.
10. H. Trinh, P.T. Nam, P.N. Pathirana, H.P. Le. On backwards and forwards reachable sets bounding for perturbed time-delay systems, *Appl. Math. Comput.*, **2015**, 269, 664-673.
11. P.T. Nam, P.N. Pathirana, H. Trinh. Convergence within a polyhedron: controller design for time-delay systems with bounded disturbances, *IET Control Theory Appl.*, **2015**, 6(9), 905-914.
12. P.T. Nam, P.N. Pathirana, H. Trinh. Reachable set bounding for nonlinear perturbed time-delay systems: The smallest bound, *Applied Mathematics Letters*, **2015**, 43(9), 68-71.
13. P.T. Nam, H. Trinh, P.N. Pathirana. Minimization of state bounding for perturbed positive systems with delays, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **2018**, 56(3), 1739-1755.
14. Z. Zuo, D.W.C. Ho, Y. Wang. Reachable set bounding for delayed systems with polytopic uncertainties: the maximal Lyapunov-Krasovskii functional approach, *Automatica*, **2010**, 46, 949-952.
15. Z. Zuo, Y. Fu, Y. Wang. Results on reachable set estimation for linear systems with both discrete and distributed delays, *IET Control Theory Appl.*, **2012**, 6, 2346-2350.
16. P.T. Nam, P.N. Pathirana, H. Trinh. Discrete Wirtinger-based inequality and its application, *J. Frankl. Inst.*, **2015**, 352(5), 1893-1905.
17. P.T. Nam, H. Trinh, P.N. Pathirana. Discrete inequalities based on multiple auxiliary functions and their applications to stability analysis of time-delay systems, *J. Frankl. Inst.*, **2015**, 352(12), 5810-5831.
18. A. Seuret, F. Gouaisbaut, E. Fridman. Stability of discrete-time systems with time-varying delays via a novel summation inequality, *IEEE Trans. Autom. Control*, **2015**, 60, 2740-2745.
19. S.Y. Lee, J.M. Park, P.G. Park. Bessel summation inequalities for stability analysis of discrete-time systems with time-varying delays, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **2018**, 29(2), 473-491.
20. P.G. Park, J. Ko, C. Jeong. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays, *Automatica*, **2011**, 47(1), 235-238.
21. A. Sueret, F. Gouaisbaut. Delay-dependent reciprocally convex combination lemma, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01257670/.2017>, 2017.
22. A. Seuret, K. Liu, F. Gouaisbaut. Generalized reciprocally convex combination lemmas and its application to time-delay systems, *Automatica*, **2018**, 95, 488-493.
23. X.M. Zhang, Q.L. Han, A. Seuret, F. Gouaisbaut. An improved reciprocally convex inequality and an augmented Lyapunov-Krasovskii functional for stability of linear systems with time-varying delay, *Automatica*, **2017**, 84, 221-226.