

DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI

NGUYỄN NGỌC QUỐC THƯƠNG^{1*}, BÙI LÊ TRỌNG THANH²

¹Khoa Toán, Trường Đại học Quy Nhơn

²Khoa Toán-Tin, Trường Đại học KHTN-ĐHQG TP. HCM

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm nhót của phương trình Hamilton-Jacobi. Trước tiên chúng tôi nhắc lại một số kết quả tiệm cận trong trường hợp tuần hoàn, sau đó chúng tôi chứng minh một số kết quả mới liên quan đến bài toán điều khiển tối ưu với dữ kiện không tuần hoàn và không bị chặn.

Từ khóa: Dáng điệu tiệm cận, Điều khiển tối ưu, Nghiệm nhót, Phương trình Hamilton-Jacobi

ABSTRACT

Asymptotic behaviour of solutions of Hamilton-Jacobi equations

In this paper, we investigate asymptotic behaviour of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. We first recall some asymptotic results in the periodic case, and then prove some new results related to optimal control problem with non-periodic and unbounded datum.

Keywords: Asymptotic behaviour, Hamilton-Jacobi equation, Optimal control, Viscosity solutions.

1. Giới thiệu

Xét phương trình Hamilton-Jacobi dừng

$$\delta u(x) + H(x, Du(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.1)$$

và phương trình Hamilton-Jacobi tiến hóa

$$v_t(x, t) + H(x, Dv(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0; +\infty), \quad (1.2)$$

trong đó $\delta > 0$ và $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số cho trước, gọi là toán tử Hamilton. Lưu ý rằng, với mỗi số thực dương δ cho trước, nghiệm của phương trình (1.1) phụ thuộc vào δ , nghĩa là $u(x) = u_\delta(x)$. Mục tiêu chính là nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm $u_\delta(x)$ của phương trình (1.1) khi $\delta \rightarrow 0^+$, và dáng điệu thời gian lớn của nghiệm $v(x, t)$ của phương trình (1.2) khi $t \rightarrow +\infty$.

Kết quả tiệm cận cho phương trình (1.1), khi δ triệt tiêu đã được đề cập trong việc nghiên cứu bài toán thuần nhất hóa tuần hoàn (periodic homogenization) của phương trình Hamilton-Jacobi (xem [25], [16], [17]). Việc nghiên cứu dáng điệu thời gian lớn của nghiệm của phương trình tiến hóa (1.2) là một hướng nghiên cứu quan trọng và nhận được rất nhiều sự quan tâm. Có hai cách tiếp cận chủ yếu cho bài toán dáng điệu thời gian lớn, đó

*Email: nguyenngocquocthuong@qnu.edu.vn

Ngày nhận bài: 18/10/2018; Ngày nhận đăng: 20/11/2018

là cách tiếp cận hệ động lực (xem [20], [15], [21], [22], [23], [24], [26], [27]). Cách tiếp cận thứ hai là phương trình đạo hàm riêng (xem [10], [8], [9]).

Trong cả hai cách tiếp cận ở trên, một trong những giả thiết cơ bản đặt ra cho toán tử Hamilton H để sự hội tụ xảy ra, đó là hàm số $H(x, p)$ tuần hoàn theo biến x và cường bức theo biến p . Điều kiện tuần hoàn tương đương với việc xét không gian nền cho phương trình là hình xuyến $\mathbb{T}^N$ (là tập compact). Điểm nổi bật của kết quả tiệm cận của hai phương trình trên là chúng có liên quan đến giá trị dừng của họ các phương trình Hamilton-Jacobi, với tham số thực λ ,

$$H(x, Dw(x)) = \lambda \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Trong bài báo này chúng tôi nhắc lại một số kết quả cơ bản về đáng điệu tiệm cận của phương trình (1.1) và (1.2) với giả thiết tuần hoàn, trong đó phép chứng minh dựa vào các kỹ thuật của nghiệm nhót. Kỹ thuật chứng minh không mới nhưng chúng tôi trình bày lại phép chứng minh đơn giản, ngắn gọn hơn (xem Định lý 2.1). Kết quả mới của bài báo là chúng tôi xét bài toán điều khiển tối ưu với các dữ kiện f, ℓ không tuần hoàn, không bị chặn và không cần điều kiện liên tục Lipschitz đặt trên hàm ℓ . Các kết quả mới này được chúng tôi trình bày ở phần cuối cùng của bài báo.

Một bài toán nữa rất thú vị có liên quan đến chủ đề của bài báo này đó là nghiên cứu đáng điệu tiệm cận của bài toán điều khiển tối ưu với nhiều kì dị. Các kết quả cho trường dữ kiện tuần hoàn và bị chặn đã được nghiên cứu trong [1], [2], [3]. Gần đây, các tác giả trong [28], [29] đã đạt được một số kết quả tương tự trong trường hợp dữ kiện không tuần hoàn và không bị chặn.

Trước khi trình bày các kết quả chính của bài báo, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở về lý thuyết nghiệm nhót. Các chứng minh chi tiết có thể xem trong [6], [7], [14].

Xét phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cấp một (gọi là phương trình Hamilton-Jacobi)

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là một tập mở, $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục cho trước,

$$Du(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)$$

là gradient của u tại điểm x , và $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ là ẩn hàm cần tìm.

Trong nhiều mô hình của bài toán ứng dụng, chẳng hạn trong bài toán điều khiển tối ưu (optimal control problems), trò chơi vi phân (differential games), hàm giá trị tối ưu (optimal value functions) không thỏa mãn phương trình (1.3) theo nghĩa cổ điển vì hàm giá trị tối ưu nói chung chỉ liên tục (thậm chí chỉ nửa liên tục) mà không khả vi. Khái niệm nghiệm nhót (viscosity solutions) do Lions và Grandall đề xuất từ những năm 80 của thế kỷ trước (xem [11], [12], [13]) đã khắc phục được các nhược điểm trên. Điều thú vị là với khái niệm nghiệm nhót, bài toán phương trình đạo hàm riêng (với điều kiện ban đầu, điều kiện biên thích hợp) trở nên đặt chỉnh (well-posed).

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại khái niệm nghiệm nhót của phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cấp một. Trước tiên ta giới thiệu khái niệm dưới vi phân và trên vi phân (theo nghĩa Fréchet) của hàm nửa liên tục như sau.

Định nghĩa 1.1. Cho hàm nửa liên tục dưới $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ và $x \in \Omega$. Dưới vi phân (subdifferential) của u tại x được định nghĩa là tập (có thể bằng rỗng)

$$D^-u(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \liminf_{|h| \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x) - p \cdot h}{|h|} \geq 0 \right\}.$$

Định nghĩa 1.2. Cho hàm nửa liên tục trên $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, và $x \in \Omega$. Trên vi phân (superdifferential) của u tại x được định nghĩa là tập (có thể bằng rỗng)

$$D^+u(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \limsup_{|h| \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x) - p \cdot h}{|h|} \leq 0 \right\}.$$

Ta kí hiệu

$$\text{USC}(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ nửa liên tục trên} \},$$

$$\text{LSC}(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ nửa liên tục dưới} \}.$$

Định nghĩa 1.3. Cho hàm số $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ xác định trên Ω .

a) Hàm số $u \in \text{USC}(\Omega)$ được gọi là *nghiệm nhót dưới* (viscosity subsolution) của (1.3) nếu,

$$F(x, u(x), p) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall p \in D^+u(x).$$

b) Hàm số $u \in \text{LSC}(\Omega)$ được gọi là *nghiệm nhót trên* (viscosity supersolution) của (1.3) nếu,

$$F(x, u(x), p) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall p \in D^-u(x).$$

c) Hàm số $u \in C(\Omega)$ được gọi là *nghiệm nhót* (viscosity solution) của (1.3) nếu nó đồng thời là nghiệm nhót dưới và nghiệm nhót trên của (1.3).

Ta đưa ra định nghĩa tương đương của nghiệm nhót thông qua hàm thử (test function) như sau.

Định nghĩa 1.4. Cho hàm số $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ xác định trên Ω .

a) Hàm số $u \in \text{USC}(\Omega)$ là *nghiệm nhót dưới* (viscosity subsolution) của (1.3) nếu, với mọi $\varphi \in C^1(\Omega)$, nếu $x_0 \in \Omega$ là điểm cực đại địa phương của $u - \varphi$ thì ta có

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)) \leq 0. \quad (1.4)$$

b) Hàm số $u \in \text{LSC}(\Omega)$ là *nghiệm nhót trên* (viscosity supersolution) của (1.3) nếu, với mọi $\varphi \in C^1(\Omega)$, nếu $x_0 \in \Omega$ là điểm cực tiểu địa phương của $u - \varphi$ thì ta có

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)) \geq 0. \quad (1.5)$$

c) Hàm số $u \in C(\Omega)$ là *nghiệm nhót* (viscosity solution) của (1.3) nếu nó đồng thời là nghiệm nhót dưới và nghiệm nhót trên.

Ví dụ 1.1. Hàm số $u(x) = |x|$ là một nghiệm nhót của phương trình

$$-|u'(x)| + 1 = 0, \quad x \in (-1; 1).$$

Thật vậy, vì hàm số $u(x) = |x|$ chỉ không khả vi tại điểm $x_0 = 0$ nên ta chỉ cần kiểm tra tính chất nghiệm nhót của u tại điểm đó. Ta có $D^+u(0) = \emptyset$, $D^-u(0) = [-1; 1]$. Do đó $-|p| + 1 \geq 0$ với mọi $p \in D^-u(0)$. Theo Định nghĩa 1.3, u là nghiệm nhót của phương trình đã cho.

2. Kết quả tiệm cận trong trường hợp tuần hoàn

Xét hai phương trình (1.1) và (1.2), trong đó toán tử Hamilton H thỏa mãn các giả thiết sau:

(H1) $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục;

(H2) Với mỗi $p \in \mathbb{R}^N$, hàm số $x \mapsto H(x, p)$ là $\mathbb{Z}^N$ tuần hoàn, nghĩa là

$$H(x + \xi, p) = H(x, p), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N, \forall p \in \mathbb{R}^N;$$

(H3) Với mỗi $p \in \mathbb{R}^N$, hàm số $x \mapsto H(x, p)$ là cưỡng bức, nghĩa là

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} H(x, p) = +\infty, \quad \forall p \in \mathbb{R}^N.$$

Xét họ các phương trình Hamilton-Jacobi có dạng

$$H(x, Dw(x)) = \lambda, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.1)$$

trong đó λ là tham số thực. Giá trị dừng (critical value) của phương trình (2.1) được định nghĩa là

$$\lambda_0 = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : (2.1) \text{ có nghiệm nhót dưới} \}. \quad (2.2)$$

Khi đó phương trình tương ứng

$$H(x, Dw(x)) = \lambda_0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (2.3)$$

được gọi là phương trình dừng (critical equation).

Kết quả sau khẳng định sự tồn tại của nghiệm nhót bị chặn trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$. Phép chứng minh có thể xem trong [25], [19].

Mệnh đề 2.1. Phương trình dừng (2.3) có nghiệm nhót liên tục, bị chặn trên $\mathbb{R}^N$.

Từ kết quả trên ta chứng minh được hai kết quả tiệm cận quan trọng sau đây. Ý tưởng của phép chứng minh dựa vào nguyên lý so sánh giữa nghiệm nhót dưới và nghiệm nhót trên.

Định lý 2.1. Giả sử $u_\delta(x)$ và $v(x, t)$ lần lượt là nghiệm của phương trình dừng (1.1) và phương trình tiến hoá (1.2). Khi đó

a) $\delta u_\delta(x) \rightarrow -\lambda_0$ đều theo biến x trong $\mathbb{R}^N$, khi $\delta \rightarrow 0^+$;

b) $\frac{v(x, t)}{t} \rightarrow -\lambda_0$ đều theo biến x trong $\mathbb{R}^N$, khi $t \rightarrow +\infty$.

Chứng minh. a) Gọi w là nghiệm nhót của phương trình (2.3). Bằng cách thêm hằng số thích hợp, ta có thể giả sử $w > 0$ trong $\mathbb{R}^N$. Khi đó $w - \frac{\lambda_0}{\delta}$ là nghiệm nhót của phương trình (1.1). Theo nguyên lý so sánh giữa nghiệm nhót dưới và nghiệm nhót trên, ta có

$$w - \frac{\lambda_0}{\delta} \leq u_\delta \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Từ đó suy ra

$$\delta w - \lambda_0 \leq \delta u_\delta \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Do đó

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \inf_{x \in \mathbb{R}^N} \delta u_\delta(x) \geq -\lambda_0.$$

Một cách tương tự, theo nguyên lý so sánh nghiệm nhót, ta có

$$w - \frac{\lambda_0}{\delta} \geq u_\delta \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Từ đó suy ra

$$\delta w - \lambda_0 \geq \delta u_\delta \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Do đó

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \delta u_\delta(x) \leq -\lambda_0.$$

Vậy $\delta u_\delta(x) \rightarrow -\lambda_0$ đều theo biến x trong $\mathbb{R}^N$, khi $\delta \rightarrow 0^+$.

b) Tương tự như chứng minh ở phần a), giả sử $w > 0$ là nghiệm nhót của phương trình (2.3). Khi đó $w - \lambda_0 t$ là nghiệm nhót của phương trình tiến hóa (1.2). Theo nguyên lý so sánh nghiệm nhót, ta có

$$w(x) - \lambda_0 t \leq v(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0; +\infty).$$

Chia hai vế cho t rồi cho $t \rightarrow +\infty$, ta được

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \inf_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{v(x, t)}{t} \geq -\lambda_0.$$

Tương tự, ta có

$$w(x) - \lambda_0 t \geq v(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0; +\infty).$$

Từ đó suy ra

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{v(x, t)}{t} \leq -\lambda_0.$$

Vậy $\frac{v(x, t)}{t} \rightarrow -\lambda_0$ đều theo biến x trong $\mathbb{R}^N$, khi $t \rightarrow +\infty$. □

3. Liên hệ với kết quả điều khiển ergodic

Một trong những mô hình tiêu biểu dẫn đến phương trình Hamilton-Jacobi cấp một đó là bài toán điều khiển tối ưu. Xét hệ điều khiển phi tuyến có dạng

$$\begin{cases} y'(s) = f(y(s), \alpha(s)), & s > 0 \\ y(0) = x, \end{cases} \quad (3.1)$$

trong đó $\alpha : [0; +\infty) \rightarrow A$ là hàm đo được (gọi là "hàm điều khiển"), $A \subset \mathbb{R}^M$ là tập con compact (gọi là "tập điều khiển"), $f : \mathbb{R}^N \times A \rightarrow \mathbb{R}^N$ là hàm số cho trước, $x \in \mathbb{R}^N$ là vị trí ban đầu và $y(s) \equiv y_x(s; \alpha) \in \mathbb{R}^N$, với $s \geq 0$, là nghiệm (còn gọi là quỹ đạo) của hệ (3.1). Để đơn giản ta ký hiệu

$$\mathcal{A} = \{ \alpha : [0; +\infty) \rightarrow A \mid \alpha \text{ đo được} \}.$$

Xét hai bài toán tối ưu hóa động lực liên kết với hệ (3.1) như sau

$$u(x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_0^{+\infty} \ell(y(s), \alpha(s)) e^{-\delta s} ds, \quad (3.2)$$

$$v(x, t) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^t \ell(y(s), \alpha(s)) ds + g(y(t)) \right\} \quad (3.3)$$

trong đó δ là tham số dương và $y(\cdot)$ là nghiệm của hệ (3.1). Các hàm số $u(x)$ và $v(x, t)$ được gọi là các hàm giá trị tối ưu (optimal value functions). Các giả thiết cơ bản đặt ra cho đủ kiện của bài toán như sau:

(A1) $f : \mathbb{R}^N \times A \rightarrow \mathbb{R}^N$ là hàm liên tục, bị chặn và thỏa mãn điều kiện Lipschitz

$$|f(x, a) - f(y, a)| \leq L_1 |x - y| \quad \forall a \in A.$$

(A2) $\ell : \mathbb{R}^N \times A \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục, bị chặn và thỏa mãn điều kiện Lipschitz

$$|\ell(x, a) - \ell(y, a)| \leq L_2 |x - y| \quad \forall a \in A.$$

(A3) $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục và bị chặn.

(A4) Với mỗi $a \in A$, các hàm $x \mapsto f(x, a)$ và $x \mapsto \ell(x, a)$ là $\mathbb{Z}^N$ -tuần hoàn, nghĩa là

$$f(x + \xi, a) = f(x, a), \quad \ell(x + \xi, a) = \ell(x, a) \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N, \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall a \in A.$$

(A5) Tồn tại $r > 0$ sao cho

$$B(0, r) \subset \overline{\text{co}} \{f(y, a) : a \in A\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Với giả thiết (A1), với mỗi $x \in \mathbb{R}^N$ và $\alpha \in \mathcal{A}$ cho trước, hệ (3.1) có nghiệm duy nhất $y(s)$, $s > 0$.

Dựa vào nguyên lý quy hoạch động của Bellman, ta có thể đặc trưng các hàm giá trị u và v như là nghiệm nhót của phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman. Phép chứng minh có thể xem trong [6].

Mệnh đề 3.1. *Giả sử các giả thiết (A1)-(A5) được thỏa mãn. Khi đó các hàm giá trị tối ưu $u(x)$ và $v(x, t)$ lần lượt là nghiệm nhót duy nhất của các phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman sau đây*

$$\delta u(x) + H(x, Du(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} v_t(x, t) + H(x, Dv(x, t)) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0; +\infty), \\ v(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (3.5)$$

trong đó

$$H(x, p) = \max_{a \in A} \{ -p \cdot f(x, a) - \ell(x, a) \}. \quad (3.6)$$

Nhận xét 3.1. Dưới các giả thiết (A1)-(A5), toán tử Hamilton-Bellman H được xác định bởi (3.6) thỏa mãn các giả thiết (H1)-(H3), do đó các hàm giá trị tối ưu u và v thỏa mãn các kết quả tiệm cận của Định lý 2.1. Đây được biết đến là kết quả điều khiển ergodic đã được Arisawa chứng minh trong các công trình [4] và [5].

4. Một số kết quả trong trường hợp không tuần hoàn

Phần này dành cho việc nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu với dữ kiện không bị chặn và không tuần hoàn. Các kết quả mới của bài báo là Định lý 4.1, Định lý 4.2, Định lý 4.3. Trước tiên ta phát biểu một số giả thiết được dùng trong phần này.

(B1) $f : \mathbb{R}^N \times A \rightarrow \mathbb{R}^N$ là hàm liên tục và thoả mãn điều kiện Lipschitz

$$|f(x, a) - f(y, a)| \leq L|x - y| \quad \forall a \in A.$$

(B2) $\ell : \mathbb{R}^N \times A \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục.

(B3) Hệ (3.1) là điều khiển được địa phương, nghĩa là với mỗi tập compact $K \subset \mathbb{R}^N$, với bất kỳ $x, z \in K$, tồn tại $T_K > 0$ và $\bar{a} \in A$ sao cho $y_x(\bar{t}, \bar{a}) = z$, với $\bar{t} \leq T_K$.

(B4) Hệ (3.1) là điều khiển được Lipschitz địa phương, nghĩa là với mỗi tập compact $K \subset \mathbb{R}^N$, với bất kỳ $x, z \in K$, tồn tại $L_K > 0$ và $\bar{a} \in A$ sao cho $y_x(\bar{t}, \bar{a}) = z$, với $\bar{t} \leq L_K|x - z|$.

Trước tiên ta chứng minh hai bổ đề cơ bản liên quan đến quỹ đạo của hệ (3.1). Hai bổ đề này được dùng trong việc chứng minh một số kết quả ở phần sau.

Bổ đề 4.1. *Giả sử (B1). Khi đó*

$$|f(x, a)| \leq C(1 + |x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, a \in A,$$

trong đó $C = \max\{M, L\}$, $M = \max_{a \in A} |f(0, a)|$, L là hằng số Lipschitz của f .

Chứng minh. Theo giả thiết (B1), ta có

$$|f(x, a) - f(0, a)| \leq L|x|, \quad x \in \mathbb{R}^N, a \in A,$$

do đó

$$|f(x, a)| \leq L|x| + |f(0, a)| \leq L|x| + M \leq C(1 + |x|),$$

trong đó $M = \max_{a \in A} |f(0, a)|$, $C = \max\{M, L\}$. □

Bổ đề 4.2. *Giả sử (B1). Khi đó*

$$|y_x(t, \alpha)| \leq (|x| + Ct)e^{Ct}, \quad \forall t \geq 0, \alpha \in A,$$

trong đó C là hằng số như trong Bổ đề 4.1. Hệ quả là, với bất kỳ $r > 0$, tồn tại $R > 0$ sao cho

$$y_x(t, \alpha) \in B_R, \quad \forall t \in [0, T],$$

với mọi hàm điều khiển $\alpha : [0, T] \rightarrow A$ và mọi $x \in B_r$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 4.1, ta có

$$|f(y, a)| \leq C(1 + |y|), \quad y \in \mathbb{R}^N, a \in A.$$

Ta có

$$\frac{d}{dt}|y_x(t, \alpha)| \leq \left| \frac{d}{dt}y_x(t, \alpha) \right| = |f(y_x(t, \alpha), \alpha(t))| \leq C(1 + |y_x(t, \alpha)|).$$

Từ đó suy ra,

$$|y_x(t, \alpha)| - |y_x(0, \alpha)| \leq \int_0^t C(1 + |y_x(s, \alpha)|) ds,$$

do vậy,

$$|y_x(t, \alpha)| \leq |x| + Ct + C \int_0^t |y_x(s, \alpha)| ds.$$

Theo bất đẳng thức Gronwall, ta nhận được

$$|y_x(t, \alpha)| \leq (|x| + Ct)e^{Ct}, \quad \forall t \geq 0, \alpha \in \mathcal{A}.$$

□

Xét bài toán cực tiểu hóa phiếm hàm tích phân

$$J^k(x, \alpha) := \limsup_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [\ell(y_x(t, \alpha), \alpha(t)) + k] dt,$$

trong đó $y_x(t, \alpha)$ là nghiệm của hệ điều khiển (3.1) và k là hằng số cho trước. Hàm giá trị tối ưu tương ứng là

$$v^k(x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J^k(x, \alpha). \quad (4.1)$$

Lưu ý rằng vì ℓ không bị chặn và phiếm hàm tích phân suy rộng không chứa hằng số "discounted factor" nên hàm giá trị tối ưu $v^k(x)$ có thể vô hạn trong $\mathbb{R}^N$. Vai trò của hằng số k là nhằm "đảm bảo" cho $v^k(x)$ hữu hạn.

Ta có kết quả đầu tiên sau đây.

Định lý 4.1. *Có định $k \in \mathbb{R}$. Giả sử (B1), (B2), (B3).*

a) *Nếu $x_0 \in \mathbb{R}^N$ sao cho $v^k(x_0) = -\infty$ thì $v^k(x) = -\infty$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$.*

b) *Nếu $x_0 \in \mathbb{R}^N$ sao cho $v^k(x_0) = +\infty$ thì $v^k(x) = +\infty$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$.*

Chứng minh. a) Giả sử $x_0 \in \mathbb{R}^N$ sao cho $v^k(x_0) = -\infty$. Lấy $m \in \mathbb{R}$, tồn tại $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ sao cho

$$J^k(x_0, \bar{\alpha}) = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T [\ell(y_{x_0}(t, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}(t)) + k] dt < m.$$

Xét $x \in \mathbb{R}^N$. Bởi giả thiết (B4), tồn tại $T_K > 0$ và $a \in \mathcal{A}$, với $K \subset \mathbb{R}$ compact chứa x_0, x sao cho

$$y_x(\bar{t}, a) = x_0 \quad \text{với } \bar{t} \leq T_K.$$

Xét hàm điều khiển

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} a(t) & \text{nếu } t \leq \bar{t} \\ \bar{\alpha}(t - \bar{t}) & \text{nếu } t > \bar{t}. \end{cases}$$

Khi đó theo tính chất nửa nhóm, ta có

$$y_x(s + \bar{t}, \alpha^*) = y_{y_x(\bar{t}, a)}(s, \bar{\alpha}) = y_{x_0}(s, \bar{\alpha}).$$

Ta có

$$\begin{aligned} v^k(x) &\leq J^k(x, \alpha^*) \\ &= \int_0^{\bar{t}} [\ell(y_x(t, a), a(t)) + k] dt + \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_{\bar{t}}^T [\ell(y_x(s, \alpha^*), \bar{\alpha}(s - \bar{t})) + k] ds \\ &= \int_0^{\bar{t}} [\ell(y_x(t, a), a(t)) + k] dt + \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T [\ell(y_x(s + \bar{t}, \alpha^*), \bar{\alpha}(s)) + k] ds \\ &= \int_0^{\bar{t}} [\ell(y_x(t, a), a(t)) + k] dt + \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T [\ell(y_{x_0}(s, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}(s)) + k] ds \\ &= \int_0^{\bar{t}} [\ell(y_x(t, a), a(t)) + k] dt + J^k(x_0, \bar{\alpha}), \end{aligned}$$

trong đó $\int_0^{\bar{t}} \ell(y_x(t, a), a(t)) dt \in \mathbb{R}$. Vì $J^k(x_0, \bar{\alpha}) < m$ với mọi $m \in \mathbb{R}$, ta suy ra $v^k(x) = -\infty$.

b) Giả sử $x_0 \in \mathbb{R}^N$ sao cho $v^k(x_0) = +\infty$. Lấy $x \in \mathbb{R}^N$, rõ ràng $v(x) > -\infty$, nếu không như thế thì theo chứng minh phần a), $v(x_0) = -\infty$. Do đó, với $\varepsilon \in \mathbb{R}$ cho trước, tồn tại $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ sao cho

$$v^k(x) \geq \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T [\ell(y_x(t, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}(t)) + k] dt - \varepsilon. \quad (4.2)$$

Bởi giả thiết (B4), tồn tại $T_K > 0$ và $a \in \mathcal{A}$, với $K \subset \mathbb{R}^N$ là tập compact chứa x_0, x sao cho

$$y_{x_0}(\bar{t}, a) = x \quad \text{với } \bar{t} \leq T_K.$$

Ta xét hàm điều khiển

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} a(t) & \text{nếu } t \leq \bar{t} \\ \bar{\alpha}(t - \bar{t}) & \text{nếu } t > \bar{t}. \end{cases}$$

Khi đó theo tính chất nửa nhóm,

$$y_{x_0}(s + \bar{t}, \alpha^*) = y_{y_{x_0}(\bar{t}, a)}(s, \bar{\alpha}) = y_x(s, \bar{\alpha}).$$

Ta có đánh giá

$$\begin{aligned} J^k(x_0, \alpha^*) &= \int_0^{\bar{t}} [\ell(y_{x_0}(t, a), a(t)) + k] dt + \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_{\bar{t}}^T [\ell(y_{x_0}(s, \alpha^*), \bar{\alpha}(s - \bar{t})) + k] ds \\ &= \int_0^{\bar{t}} [\ell(y_{x_0}(t, a), a(t)) + k] dt + \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T [\ell(y_{x_0}(s + \bar{t}, \alpha^*), \bar{\alpha}(s)) + k] ds \\ &= \int_0^{\bar{t}} [\ell(y_{x_0}(t, a), a(t)) + k] dt + \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T [\ell(y_x(s, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}(s)) + k] ds. \end{aligned}$$

Vì

$$v^k(x_0) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J^k(x_0, \alpha) = +\infty,$$

nên

$$J^k(x_0, \alpha^*) = +\infty.$$

Hơn nữa,

$$\int_0^{\bar{t}} [\ell(y_{x_0}(t, a), a(t)) + k] dt \in \mathbb{R},$$

do đó,

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T [\ell(y_x(s, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}(s)) + k] ds = +\infty.$$

Từ đó suy ra, theo (4.2), $v^k(x) = +\infty$. □

Từ kết quả trên ta dễ dàng suy ra được hệ quả quan trọng sau.

Hệ quả 4.1. *Cố định $k \in \mathbb{R}$. Giả sử (B1), (B2), (B3). Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}^N$ sao cho $v^k(x_0) \in \mathbb{R}$ thì $v^k(x) \in \mathbb{R}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$.*

Lưu ý rằng, trong hệ quả trên hằng số k được cho trước và chúng ta giả sử rằng $v^k(x_0)$ hữu hạn tại điểm x_0 nào đó trong $\mathbb{R}^N$. Vấn đề đặt ra là liệu có tồn tại điểm x_0 như thế hay không? Nếu câu trả lời là khẳng định thì hàm giá trị $v^k(x)$ hữu hạn tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}^N$. Tuy nhiên chúng ta chưa có câu trả lời cho sự tồn tại của điểm x_0 để $v^k(x_0) \in \mathbb{R}$. Thay vào đó chúng ta quan tâm đến bài toán sau: Cố định $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Tồn tại hay không hằng số c sao cho $v^c(x_0) \in \mathbb{R}$. Nếu hằng số c như thế tồn tại, thì theo Hệ quả 4.1, $v^c(x) \in \mathbb{R}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$. Để trả lời cho câu hỏi này, ta xét tập sau

$$\mathcal{F} := \{k \in \mathbb{R} : v^k(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^N\}.$$

Định lý 4.2. *Giả sử (B1), (B2), (B3). Khi đó $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Hơn nữa nếu $c \in \mathcal{F}$ thì $\mathcal{F} = \{c\}$.*

Chứng minh. Xét hàm số $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, +\infty]$ được cho bởi

$$\varphi(k, x) = v^k(x), \quad (k, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

Rõ ràng với mỗi $x_0 \in \mathbb{R}^N$,

$$\varphi(k, x_0) \leq \varphi(k', x_0), \quad \forall k \leq k'.$$

Hơn nữa

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \varphi(k, x_0) = -\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(k, x_0) = +\infty.$$

Do đó tồn tại $k_0 := k_0(x_0) \in \mathbb{R}$ (k_0 phụ thuộc vào x_0) sao cho $\varphi(k_0, x_0) := v^{k_0}(x_0) \in \mathbb{R}$. Khi đó, theo Hệ quả 4.1, $v^{k_0}(x) \in \mathbb{R}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$, tức là $k_0 \in \mathcal{F}$, hay $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Giả sử $c \in \mathcal{F}$. Ta sẽ chứng minh rằng $c' \notin \mathcal{F}$ với bất kỳ $c' \neq c$. Thật vậy, cố định $x \in \mathbb{R}^N$, vì $v^c(x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J^c(x, \alpha) \in \mathbb{R}$, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ sao cho

$$J^c(x, \bar{\alpha}) < v^c(x) + \varepsilon < +\infty.$$

Hơn nữa,

$$-\infty < v^c(x) \leq J^c(x, \bar{\alpha}).$$

Do đó,

$$J^c(x, \bar{\alpha}) \in \mathbb{R}.$$

Lấy $T > 0$, với hàm điều khiển $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ ở trên, ta có

$$\int_0^T [\ell(\bar{y}(t), \bar{\alpha}(t)) + c'] dt = \int_0^T [\ell(\bar{y}(t), \bar{\alpha}(t)) + c] dt + (c' - c)T.$$

Cho $T \rightarrow +\infty$, và bởi $J^c(x, \bar{\alpha}) \in \mathbb{R}$, ta được

$$J^{c'}(x, \bar{\alpha}) = -\infty, \quad \forall c' < c,$$

$$J^{c'}(x, \bar{\alpha}) = +\infty, \quad \forall c' > c.$$

Sự kiện $c' \notin \mathcal{F}$ được lập luận như sau:

- Nếu $c' < c$, ta có

$$v^{c'}(x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J^{c'}(x, \alpha) \leq J^{c'}(x, \bar{\alpha}) = -\infty,$$

do đó $c' \notin \mathcal{F}$.

- Nếu $c' > c$, lấy $T > 0$ và bất kỳ $\alpha \in \mathcal{A}$, ta có

$$\int_0^T [\ell(y(t), \alpha(t)) + c'] dt = \int_0^T [\ell(y(t), \alpha(t)) + c] dt + (c' - c)T. \quad (4.3)$$

Hơn nữa,

$$J^c(x, \alpha) \geq v^c(x) > -\infty, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Cho $T \rightarrow +\infty$ in (4.3), ta được

$$J^{c'}(x, \alpha) = +\infty, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A},$$

do đó

$$v^{c'}(x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J^{c'}(x, \alpha) = +\infty.$$

Suy ra $c' \notin \mathcal{F}$.

□

Định nghĩa 4.1. Phần tử duy nhất c trong tập $\mathcal{F}$ được gọi là *giá trị dừng (critical value)* của bài toán điều khiển tối ưu (4.1) liên kết với hệ điều khiển (3.1).

Từ bây giờ, để cho đơn giản, ta viết $J(x, \alpha) := J^c(x, \alpha)$ và $v(x) := v^c(x)$, trong đó c là giá trị dừng được định nghĩa ở trên.

Tiếp theo ta nghiên cứu tính chất chính quy của hàm giá trị tối ưu v . Giả thiết mấu chốt cho kết quả sau đây là tính điều khiển được Lipschitz địa phương của hệ điều khiển (3.1).

Định lý 4.3. *Giả sử (B1)-(B4). Khi đó hàm giá trị tối ưu v liên tục trong $\mathbb{R}^N$.*

Chứng minh. Cố định $x \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ và xét $z \in B(x, r)$. Rõ ràng $B(x, r)$ là một tập compact chứa x và z . Với bất kỳ $\varepsilon > 0$, tồn tại $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ sao cho

$$v(z) \geq \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T [\ell(y_z(t, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}(t)) + c] dt - \varepsilon. \quad (4.4)$$

Theo giả thiết (B4), tồn tại $L_r > 0$ và $a \in \mathcal{A}$ sao cho

$$y_x(\bar{t}, a) = z \quad \text{với } \bar{t} \leq L_r |x - z|.$$

Ta xét hàm điều khiển

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} a(t) & \text{nếu } t \leq \bar{t} \\ \bar{\alpha}(t - \bar{t}) & \text{nếu } t > \bar{t}. \end{cases}$$

Khi đó theo tính chất nửa nhóm, ta có

$$y_x(s + \bar{t}, \alpha^*) = y_{y_x(\bar{t}, a)}(s, \bar{\alpha}) = y_z(s, \bar{\alpha}).$$

Ta có

$$\begin{aligned} v(x) &\leq J(x, \alpha^*) \\ &= \int_0^{\bar{t}} [\ell(y_x(t, a), a(t)) + c] dt + \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_{\bar{t}}^T [\ell(y_x(s, \alpha^*), \bar{\alpha}(s - \bar{t})) + c] ds \\ &= \int_0^{\bar{t}} [\ell(y_x(t, a), a(t)) + c] dt + \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T [\ell(y_x(s + \bar{t}, \alpha^*), \bar{\alpha}(s)) + c] ds \\ &= \int_0^{\bar{t}} [\ell(y_x(t, a), a(t)) + c] dt + \limsup_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T [\ell(y_z(s, \bar{\alpha}), \bar{\alpha}(s)) + c] ds \\ &\leq \int_0^{\bar{t}} [\ell(y_x(t, a), a(t)) + c] dt + v(z) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 4.2, bằng cách đặt $R_x := (|x| + k\bar{t})e^{k\bar{t}}$, ta có $y_x(t, a) \in B_{R_x}$ với mọi $t \in [0, \bar{t}]$. Hơn nữa $a(t) \in A$ với mọi $t \in [0, \bar{t}]$, và $\ell : B_{R_x} \times A \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục theo hai biến, do đó tồn tại

$$M_x = \max_{y \in B_{R_x}, a \in A} [\ell(y, a) + c].$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} v(x) - v(z) &\leq \bar{t}M_x + \varepsilon \\ &\leq L_r M_x |x - z| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Lập luận một cách tương tự, ta nhận được

$$v(z) - v(x) \leq L_r \widetilde{M}_x |x - z| + \varepsilon,$$

trong đó

$$\widetilde{M}_x = \max_{y \in B_{\widetilde{R}_x}, a \in A} [\ell(y, a) + c], \quad \widetilde{R}_x := (|x| + r + k\bar{t})e^{k\bar{t}}.$$

Vì ε là bất kỳ, cho nên chứng minh hoàn tất. □

Tiếp theo ta đưa ra đặc trưng nghiệm nhất cho hàm giá trị tối ưu v . Kết quả này đã được biết đến với các giả thiết chính quy đặt trên các dữ kiện f, g và ý tưởng của phép chứng minh dựa vào nguyên lý quy hoạch động của Bellman (Dynamic Programming Principle). Dựa vào phương pháp chứng minh đó (chẳng hạn xem trong [6]) với một vài thay đổi kỹ thuật, ta có thể chứng minh được hai kết quả tương tự như sau. Điều khác biệt trong kết quả của chúng tôi là hàm ℓ không bị chặn, không thỏa mãn điều kiện Lipschitz và hằng số "discounted factor" là bằng không.

Mệnh đề 4.1 (Nguyên lý quy hoạch động). *Giả sử (B1)-(B3). Khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}^N$ và mọi $t > 0$,*

$$v(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^t [\ell(y_x(s, \alpha), \alpha(s)) + c] ds + v(y_x(t, \alpha)) \right\}$$

Mệnh đề 4.2 (Phương trình HJB). *Giả sử (B1)-(B4). Khi đó, v là một nghiệm nhất của phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman*

$$H(x, Dv(x)) = c \quad \text{trong } \mathbb{R}^N,$$

trong đó

$$H(x, p) := \sup_{a \in A} \{ -f(x, a) \cdot p - \ell(x, a) \}.$$

LỜI CẢM ƠN

Tác giả được tài trợ bởi Đề tài khoa học và công nghệ cấp Trường năm 2017, Mã số T2017.541.44. Tác giả cũng cảm ơn các đồng nghiệp trong khoa toán đã có những thảo luận, góp ý xác đáng cho bản thảo bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. O. Alvarez, M. Bardi, *Viscosity solutions methods for singular perturbations in deterministic and stochastic control*, SIAM J. Control Optim, 40, 1159-1188, (2001).
2. O. Alvarez, M. Bardi, *Singular perturbations of nonlinear degenerate parabolic PDEs: a general convergence result*, Arch. Ration. Mech. Anal, 170, 17-61, (2003).
3. O. Alvarez, M. Bardi, *Ergodicity, stabilization, and singular perturbations for Bellman-Isaacs equations*, Mem. Amer. Math. Soc, 204, (2010).
4. M. Arisawa (1997), *Ergodic problem for the Hamilton-Jacobi-Bellman equation I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal, Non Linéaire 14, 415-438, (1997).
5. M. Arisawa (1998), *Ergodic problem for the Hamilton-Jacobi-Bellman equation II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal, Non Linéaire 15, 1-24, (1998).
6. M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta, *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Birkhäuser, Boston, (1997).
7. G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer, Paris, (1994).
8. G. Barles, H. Ishii, H. Mitake, *On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations associated with nonlinear boundary conditions*, Arch. Ration. Mech. Anal, 204, 515-558, (2012).

9. G. Barles, H. Mitake, *A PDE approach to large-time asymptotics for boundary-value problems for non-convex Hamilton-Jacobi equations*, Commun. Partial Differ. Equ, 37, 136-168, (2012).
10. G. Barles, P.E. Souganidis, *On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Math. Anal, 31, 925-939, (2000).
11. M. G. Crandall, P. L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc, 277, 1-42, (1983).
12. M. G. Crandall, L. C. Evans, P. L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Am. Math. Soc, 282, 487-502, (1984).
13. M. G. Crandall, P. L. Lions, *On existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Nonlinear Anal., T. M. A, 10, 353-370, (1986).
14. P. Cannarsa, C. Sinestrari, *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58, Birkhäuser Boston, (2004).
15. A. Davini, A. Siconolfi, *A generalized dynamical approach to the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Math. Anal, 38, 478-502, (2006).
16. L. C. Evans, *The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear PDE*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 111, 359-375, (1989).
17. L. C. Evans, *Periodic homogenisation of certain fully nonlinear partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 120, 245-265, (1992).
18. L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, (1997).
19. A. Fathi, A. Siconolfi, *PDE aspects of Aubry-Mather theory for quasiconvex Hamiltonian*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 22, 185-228, (2005).
20. A. Fathi, *Sur la convergence du semi-groupe de Lax-Oleinik*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, 327, 267-270, (1998).
21. Y. Fujita, H. Ishii, P. Loreti, *Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean n space*, Indiana Univ. Math. J, 55, 1671-1700, (2006).
22. N. Ichihara, H. Ishii, *Long-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex and coercive Hamiltonians*, Arch. Ration. Mech. Anal, 194, 383-419, (2009).
23. H. Ishii, *Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean n space*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 25, 231-266, (2008).
24. H. Ishii, *Long-time asymptotic solutions of convex Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions*, Calc. Var. Partial Differ. Equ, 42, 189-209, (2011).
25. P. L. Lions, G. Papanicolau and S. R. S. Varadhan, *Homogeneization of Hamilton-Jacobi equations*, Unpublished, (1986).

26. H. Mitake, *Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations with state constraints*. Appl. Math. Optim. 58, 393-410, (2008).
27. H. Mitake, *The large-time behavior of solutions of the Cauchy-Dirichlet problem for Hamilton-Jacobi equations*, NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl, 15, 347-362, (2008).
28. T. Nguyen, A. Siconolfi, *Singularly perturbed control systems with noncompact fast variable*, J. Differential Equations 261, 4593-4630, (2016).
29. Nguyen Ngoc Quoc Thuong, *Asymptotic behaviour of singularly perturbed control systems in the non-periodic setting*, PhD thesis, University of Rome "La Sapienza", Rome, Italy, <http://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/dottorato/TESI/ARCHIVIO/thuongnguyenngocquoc.pdf>, (2015).