

The Chinese Remainder theorem in Sino-Nom mathematics books

Tran Dai An¹, Pham Van Hoang², Doan Thi Le³,
Ta Duy Phuong^{4,*}, Cung Thi Kim Thanh⁵, Phan Anh Tuyet⁶

¹Hanoi National University of Education, Vietnam

²VNU University of Education, Vietnam

³National Tsing Hua University, Taiwan

⁴Hanoi Institute of Mathematics, Vietnam

⁵Tran Nhan Tong Institute, Hanoi National University, Vietnam

⁶National Taiwan Normal University, Taiwan

Received: 21/01/2022; Revised: 21/03/2022;

Accepted: 28/04/2022; Published: 28/08/2022

ABSTRACT

The Chinese Remainder Theorem is considered one of the important contributions of the Chinese to the world treasure of mathematical knowledge. The Chinese Remainder Theorem has been used by the Chinese in astronomy and calendar calculations since the 2nd century BC and was stated in mathematical language around the 5th century. However, it was only in the 13th century that this theorem was rigorously proved by the Chinese mathematician Qin Jiushaq. The article presents the Chinese Remainder Theorem in Chinese and Sino-Nom mathematics books (Vietnamese mathematics books written in Chinese and Nom characters). Thereby, it is possible to partly imagine the ability to receive and develop the mathematics of the Vietnamese mathematicians in the Middle Ages and the contemporary significance of mathematical knowledge in Sino-Nom mathematics books in teaching mathematics today.

Keywords: *The Chinese Remainder theorem, Sino-Nom mathematics books, history of mathematics, Vietnamese mathematics in the Middle Ages, mathematics education.*

*Corresponding author:

Email: tdphuong@math.ac.vn

Định lí Trung Quốc về phần dư trong các sách toán Hán - Nôm

Trần Đại An¹, Phạm Văn Hoàng², Đoàn Thị Lệ³,
Tạ Duy Phương^{4,*}, Cung Thị Kim Thành⁵, Phan Thị Ánh Tuyết⁶

¹Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Việt Nam

²Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội, Việt Nam

³Đại học Quốc lập Thanh Hoa, Đài Loan

⁴Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ, Việt Nam

⁵Viện Trần Nhân Tông, Đại học Quốc gia Hà Nội, Việt Nam

⁶Đại học Sư phạm Quốc lập Đài Loan, Đài Loan

Ngày nhận bài: 21/01/2022; Ngày sửa bài: 21/03/2022;

Ngày nhận đăng: 28/04/2022; Ngày xuất bản: 28/08/2022

TÓM TẮT

Định lí Trung Quốc về phần dư được coi là một trong những đóng góp quan trọng của người Trung Quốc vào kho tàng kiến thức toán học thế giới. *Định lí Trung Quốc về phần dư* được người Trung Quốc sử dụng trong thiên văn và tính toán lịch từ thế kỉ II trước Công nguyên và được phát biểu dưới ngôn ngữ toán học vào khoảng thế kỉ V. Nhưng chỉ đến thế kỉ XIII *Định lí* này mới được nhà toán học Trung Quốc Tồn Cửu Thiệu chứng minh bằng toán học một cách chặt chẽ. Bài viết trình bày *Định lí Trung Quốc về phần dư* trong các sách toán Trung Quốc và sách toán Hán-Nôm (sách toán của Việt Nam viết bằng chữ Hán và chữ Nôm). Qua đó có thể phần nào hình dung về khả năng tiếp nhận và phát triển toán học của các nhà toán học Việt Nam thời trung đại, cũng như ý nghĩa thời sự của kiến thức toán học trong các sách toán Hán-Nôm trong giảng dạy toán hiện nay.

Từ khóa: *Định lí Trung Quốc về phần dư, sách toán Hán-Nôm, lịch sử toán học, toán học Việt Nam thời Trung đại, giảng dạy toán học.*

1. MỞ ĐẦU

Định lí Trung Quốc về phần dư (The Chinese Remainder Theorem) có nguồn gốc từ bài toán *Vật bất tri kỳ số* trong cuốn sách chữ Hán *Tôn Tử toán kinh* (khoảng thế kỉ V).¹ Mặc dù *Định lí Trung Quốc về phần dư* là cơ sở để xây dựng thuật toán giải hệ phương trình đồng dư bậc nhất, đã được sử dụng trong tính toán thiên văn và tính toán lịch tại Trung Quốc cổ đại vào thế kỉ II trước Công nguyên.² Nhưng nó chỉ được nhà toán học

Trung Quốc Tồn Cửu Thiệu chứng minh chặt chẽ vào thế kỉ XIII.³ Trình Đại Vị cũng gọi bài toán *Vật bất tri kỳ số* là bài toán *Hàn Tín điểm binh*.⁴

Định lí Trung Quốc về phần dư có bản chất toán học sâu sắc và có nhiều ứng dụng thực tế, vì vậy nó luôn mang ý nghĩa thời sự. Nó nằm trong chương trình chính khóa cho học sinh chuyên Toán-Tin và cho sinh viên các ngành Toán-Khoa học máy tính và được giảng dạy trong các môn Lý thuyết số, Lý thuyết thuật toán... Hiện nay

*Tác giả liên hệ chính.

Email: tdphuong@math.ac.vn

toán đồng dư được phát triển theo nhiều hướng: Hệ phương trình đồng dư nhiều ẩn, phương trình đồng dư phi tuyến áp dụng trong các bài toán thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế;⁵ Đồng dư trên các trường số tổng quát; ứng dụng của đồng dư trong mật mã, máy tính,...⁶

Có thể khẳng định rằng người Việt Nam đã biết đến *Định lí Trung Quốc về phần dư* qua bài toán *Điểm binh pháp* (phép điểm binh) trong cuốn sách *Toán pháp đại thành*⁷ của Lương Thế Vinh (1441-1496).

Trong Chương 6 của cuốn sách *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* (Một điều tâm đắc về toán của Ý Trai)⁸ gồm 8 Quyển do Nguyễn Hữu Thận (1757-1831, tên chữ: Ý Trai) bắt đầu viết từ năm 1812 và hoàn thành năm 1829, *Định lí Trung Quốc về phần dư* được biết đến dưới tên bài toán *Vật bất tri kì số* và được Nguyễn Hữu Thận gọi là dạng toán *Dĩ dư số tri nguyên số* (Từ số dư tìm ra số ban đầu).

Hoàng Xuân Hãn đã viết một bài báo với tên gọi *Hàn Tín điểm binh*.⁹ Tuy nhiên, Hoàng Xuân Hãn chỉ bàn về cách giải bài toán mà chưa khảo cứu các sách toán Hán-Nôm. Bài viết này có lẽ là bài báo đầu tiên tìm hiểu *Định lí Trung Quốc về phần dư* trong các sách toán Hán-Nôm của các tác giả Việt Nam. Nhằm làm rõ vấn đề và so sánh với các sách toán Hán-Nôm, chúng tôi cũng điểm qua những tư liệu của các tác giả Trung Quốc trước thế kỉ XVI viết về bài toán này.

2. NỘI DUNG

2.1. Định lí Trung Quốc về phần dư trong các sách toán Trung Quốc

2.1.1. Một số bài toán *Định lí Trung Quốc về phần dư* có nguồn gốc từ bài toán *Vật bất tri kì số* trong cuốn sách chữ Hán *Tôn Tử toán kinh* (khoảng thế kỉ IV-thế kỉ V).¹

Bài 2.1.1 (Bài toán số 26, Quyển hạ)¹ *Nay có một đồng đồ, không rõ số lượng, chỉ biết xếp mỗi nhóm 3 cái thì thừa ra 2, xếp theo nhóm 5 thì thừa 3, theo nhóm 7 thì thừa 2. Hỏi số lượng đồ vật là bao nhiêu?*

Lưu ý: Để trình bày gọn, chúng tôi không chép lại nguyên văn bài toán bằng chữ Hán, mà chỉ dịch Đầu bài và Lời giải trong các sách toán cổ. Sau đó giải thích Lời giải bằng ngôn ngữ hiện đại.

Bài toán này đã được nhiều nhà toán học Trung Quốc tiếp tục nghiên cứu, chứng minh thuật giải và phát triển. Dương Huy (楊輝, 1238-1298) có 4 bài khó hơn một chút nhưng cùng dạng.

Bài 2.1.2 (Dương Huy)¹⁰ *Xếp mỗi nhóm 7 thì thừa 1, xếp 8 thừa 2, xếp 9 thừa 3. Hỏi số lượng vật là bao nhiêu?*

Bài 2.1.3 (Dương Huy)¹⁰ *Xếp mỗi nhóm 11 thì dư 3, xếp 12 dư 2, xếp 13 dư 1. Hỏi số lượng vật là bao nhiêu?*

Bài 2.1.4 (Dương Huy)¹⁰ *Xếp mỗi nhóm 2 thì dư 1, xếp 5 dư 2, xếp 7 dư 3, xếp 9 dư 4. Hỏi số lượng vật là bao nhiêu?*

Bài 2.1.5 (Dương Huy)¹⁰ *Dùng một đội công nhân không biết số lượng. Sai người khảo họ. Cho mỗi nhóm 3 người 1 cân thịt thì thừa 5 lạng 8 thù, tức là đếm 3 thừa 2. Cho mỗi nhóm 5 người 1 quan tiền thì thừa 400 tiền, tức là đếm 5 thừa 3. Mỗi nhóm 7 người hứng một lần, thu chén lại mà hứng (tức là đếm 7 không thừa). Hỏi tổng số công nhân và mỗi thứ chi ra là bao nhiêu?*

Trong sách *Chỉ Nhã Đường tạp sao*¹¹ của Chu Mật (1232-1298) có bài thơ sau đây, có lẽ là phiên bản thơ đầu tiên của bài *Vật bất tri kì số*:

三歲孩兒七十稀

五留廿一事尤奇

七度上元重相會

寒食清明便可知

Phiên âm:

Tam tuế hài nhi thất thập hi

Ngũ lưu chấp nhất, sự vuơ kì

Thất độ Thượng Nguyên trùng tương hội

Hàn Thực, Thanh Minh tiện khả tri.

Giải thích: Hàn Thực, Thanh Minh: Khoảng thời gian từ Đông chí tới ngày Thanh Minh là 105 ngày, gọi là tiết Hàn thực. “Hàn thực” ám chỉ số 105.

Dịch:

Đứa trẻ 3 tuổi, [khi ông bố] 70, hiếm

5 lưu 21, việc cày lạ

7 lần Thương Nguyên lại gặp lại

Hàn Thực, Thanh Minh tiện biết được.

Trình Đại Vị có bài thơ *Vật bất tri tống* (*Tôn Tử ca*, hay còn gọi là *Hàn Tín điểm binh*):⁴

三人同行七十稀

五樹梅花廿一枝

七子團圓正半月

除百零五便得知

Phiên âm (Hoàng Xuân Hãn):⁹

Tam nhân đồng hành thất thập hi

Ngũ thụ mai hoa thập nhất chi

Thất tử đoàn viên chính bán nguyệt

Trừ bách linh ngũ tiện đắc tri.

Dịch (Hoàng Xuân Hãn):⁹

Ba người cùng đi ít bảy chục

Năm cội hoa mai hăm một cành

Bảy gã xum vầy vừa nửa tháng

Trừ trăm linh năm biết số thành.

2.1.2. Phương trình đồng dư tuyến tính

Cho a, b, m là các số nguyên cho trước. Ta nói a đồng dư với b theo modul m (hay a và b cùng thuộc một lớp đồng dư) và kí hiệu $a \equiv b \pmod{m}$ nếu $a - b$ là bội của m

Phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ được gọi là *phương trình đồng dư tuyến tính một biến*.

Nghiệm của phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$ là số nguyên x sao cho ax chia cho m còn dư b .

Xét phương trình đặc biệt dạng $ax \equiv 1 \pmod{m}$.

Tần Cửu Thiệu (秦九韶, 1202-1261) trong *Số thư Cửu chương* (数书九章, 1247)³ đã đưa ra phương pháp giải phương trình đồng dư

$ax \equiv 1 \pmod{m}$. Phương pháp này tương đương với việc giải phương trình nghiệm nguyên $ax + my = 1$ đã được các nhà toán học Ấn Độ đưa ra thuật toán giải vào thế kỉ VII.^{2,12}

Kí hiệu (a, b) là *ước số chung lớn nhất* của hai số nguyên a và b .

Nếu $(a, b) = 1$ thì ta nói a và b là hai số *nguyên tố cùng nhau*.

Nhận xét 1.1.2.1 Nếu $(a, m) = 1$, thì phương trình $ax \equiv 1 \pmod{m}$ có duy nhất nghiệm và có thể tìm nghiệm nhờ giải phương trình nghiệm nguyên $ax + my = 1$.¹³

2.1.3. Định lí Trung Quốc về phần dư

Định lí Trung Quốc về phần dư phát biểu như sau:

Cho k số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau $m_1, m_2, \dots, m_k$ và $a_1, a_2, \dots, a_k$ là k số nguyên tùy ý. Khi ấy hệ phương trình đồng dư

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases} \quad (1)$$

có duy nhất nghiệm (theo nghĩa các nghiệm cùng thuộc lớp đồng dư) theo modulo $m_1 m_2 \dots m_k$.

Chứng minh:^{3,5,13}

Tính duy nhất: Giả sử hệ có hai nghiệm x, y sao cho

$$x \equiv y \pmod{m_i}, i = 1, 2, \dots, k.$$

Vì $m_1, m_2, \dots, m_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên $x \equiv y \pmod{m_1 m_2 \dots m_k}$, tức là x và y cùng thuộc một lớp đồng dư theo modulo $m_1 m_2 \dots m_k$.

Sự tồn tại: Tìm nghiệm x dưới dạng tổ hợp tuyến tính của a_i :

$$x = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_k a_k$$

với các A_i thỏa mãn $A_j \equiv 0 \pmod{m_i} \forall j \neq i$ và $A_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.

Đặt $N_i = m_1 m_2 \dots m_{i-1} m_{i+1} \dots m_k, i = 1, 2, \dots, k$. Khi ấy N_j chia hết cho m_j với mọi $\forall j \neq i$. Vì $(m_p, m_1) = \dots = (m_p, m_{i-1}) = (m_p, m_{i+1}) = \dots = (m_p, m_k) = 1$ nên $(N_p, m_i) = 1$. Do đó (xem Nhận xét 1.1.2.1)

tồn tại duy nhất x_i là nghiệm của phương trình $N_i x \equiv 1 \pmod{m_i}$. Đặt

$$x = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_k a_k \\ = N_1 x_1 a_1 + N_2 x_2 a_2 + \dots + N_k x_k a_k.$$

Khi ấy

$$A_i = N_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}, A_i \equiv 0 \pmod{m_j} \forall j \neq i.$$

Vậy $x \equiv N_i x_i a_i \equiv a_i \pmod{m_i}$.

Theo chứng minh trên, để giải hệ phương trình đồng dư tuyến tính (1), ta phải làm các bước sau.

Bước 1: Đặt $m = m_1 m_2 \dots m_k = N_i m_i, i = 1, 2, \dots, k$.

Bước 2: Tìm nghiệm x_i của các phương trình $N_i x \equiv 1 \pmod{m_i}$ (thí dụ, theo thuật toán giải phương trình vô định).^{3,12}

Bước 3: Nghiệm của hệ được tìm dưới dạng

$$x_0 = \sum_{i=1}^k N_i x_i a_i.$$

Bước 4: Kết luận nghiệm $x \equiv x_0 \pmod{m}$.

2.1.4. Áp dụng Mục này áp dụng Định lí Trung Quốc về phân dư để giải các bài toán đã phát biểu trong Mục 2.1.1.

Giải bài 2.1.1:¹

Cách tính rằng: 3, lấy vật nó chia cho 3, dư 2, đặt 140; 5, lấy nó chia cho 5, dư 3, đặt 63; 7, lấy nó chia cho 7, dư 2, đặt 30. Cộng chúng lại được 233. Lấy 210 trừ đi nó, thì tính được.

Cứ 3, lấy nó chia cho 3, dư 1, thì đặt 70; 5, lấy nó chia cho 5, dư 1 thì đặt 21; 7, lấy nó chia cho 7, dư 1 thì đặt 15. Từ 106 trở lên, lấy 105 trừ với nó thì tính được.

Giải thích Gọi số cần tìm là x . Ta có hệ

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

Đặt

$$N_1 = 5 \times 7 = 35;$$

$$N_2 = 3 \times 7 = 21;$$

$$N_3 = 3 \times 5 = 15.$$

Vì $(5, 7) = (7, 3) = (3, 5) = 1$ nên

$$(N_1, 3) = (N_2, 5) = (N_3, 7) = 1.$$

Suy ra tồn tại các số $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$ tương ứng là các nghiệm của các phương trình

$$N_i x \equiv 1 \pmod{m_i}, i = 1, 2, 3.$$

Vậy

$$x = 35 \times 2 \times 2 + 21 \times 1 \times 3 + 15 \times 1 \times 2 = 233.$$

233 cho hai lần 3 $\times$ 5 $\times$ 7 = 105 được dư 233 cho hai lần 3 $\times$ 5 $\times$ 7 = 105 được nghiệm nhỏ nhất là 23.

Nhận xét Dương Huy gọi thuật trừ 105 là “tiền quân” (cắt đốt),¹⁰ nghĩa là nếu số vượt quá $3 \times 5 \times 7 = 105$ thì “cắt đốt”: trừ cho bội của 105 để được nghiệm nhỏ nhất thỏa mãn hệ phương trình đồng dư.

Giải bài 2.1.2:¹⁰

Thuật rằng: 7 dư 1 viết xuống 288, trong đề dư 1; 8 dư 1 viết xuống 441, trong đề dư 2 viết xuống 882; 9 dư 1 viết xuống 280, trong đề dư 3 viết xuống 840. Gộp lại được 2010, đủ 504 thì trừ đi. Trừ 3 lần 504 còn 498, hợp với câu hỏi.

Giải thích Gọi số đã cho là x . Ta có hệ

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{8} \\ x \equiv 3 \pmod{9} \end{cases}$$

Đặt

$$N_1 = 8 \times 9 = 72;$$

$$N_2 = 7 \times 9 = 63;$$

$$N_3 = 7 \times 8 = 56.$$

Vì $(8, 9) = (7, 9) = (7, 8) = 1$ nên

$$(N_1, 7) = (N_2, 8) = (N_3, 9) = 1.$$

Tồn tại các số $x_1 = 4, x_2 = 7, x_3 = 5$ tương ứng là các nghiệm của phương trình $N_i x \equiv 1 \pmod{m_i}$.

Vậy

$$x = 72 \times 4 \times 1 + 63 \times 7 \times 2 + 56 \times 5 \times 3 \\ = 288 + 882 + 840 = 2010.$$

Trừ 2010 ba lần cho $7 \times 8 \times 9 = 504$ được 498.

Giải bài 2.1.3:¹⁰

Thuật rằng: 11 dư 1 viết xuống 936, trong đề dư 3 viết xuống 2808; 12 dư 1 viết

xuống 1573, trong đề dư 2 viết xuống 3146; 13 dư 1 viết xuống 924, trong đề dư 1. Gộp lại được 6878, pháp đây tổng trừ đi 1716. Trừ 4 lần 1716 còn 14, hợp với câu hỏi.

Giải thích Gọi số cần tìm là x . Ta có hệ

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod{12} \\ x \equiv 1 \pmod{13}. \end{cases}$$

Đặt

$$N_1 = 12 \times 13 = 156;$$

$$N_2 = 11 \times 13 = 143;$$

$$N_3 = 11 \times 12 = 132.$$

Vì $(12, 13) = (11, 13) = (11, 12) = 1$ nên

$$(N_1, 11) = (N_2, 12) = (N_3, 13) = 1.$$

Tồn tại các số $x_1 = 6, x_2 = 11, x_3 = 7$ là các nghiệm của các phương trình $N_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.

Vậy

$$x = 156 \times 6 \times 3 + 143 \times 11 \times 2 + 132 \times 7 \times 1$$

$$= 2808 + 3146 + 924 = 6878.$$

6878 không chia hết cho 11, 12, 13, 17, 16, 716 c được nghiệm nhỏ nhất là 14.

Giải bài 2.1.4:¹⁰

Thuật rằng: Đếm 2 dư 1 viết xuống 315, trong đề dư 1; đếm 5 dư 2 viết xuống 126, trong đề dư 2, viết xuống 252; đếm 7 dư 1 viết xuống 540, trong đề dư 3 viết xuống 1620; đếm 9 dư 1 viết xuống 280, trong đề dư 4 viết xuống 1120. Gộp lại được 3307, pháp đây tổng trừ đi 630. Trừ đi 5 lần 630 còn 157 là đáp số, hợp với câu hỏi.

Giải thích Gọi số đã cho là x . Ta có hệ

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{9}. \end{cases}$$

Đặt

$$N_1 = 5 \times 7 \times 9 = 315;$$

$$N_2 = 2 \times 7 \times 9 = 126;$$

$$N_3 = 2 \times 5 \times 9 = 90;$$

$$N_4 = 2 \times 5 \times 7 = 70.$$

Kí hiệu (a, b, c) là ước số chung lớn nhất của ba số nguyên dương a, b, c .

Vì $(5, 7, 9) = (2, 7, 9) = (2, 5, 9) = 1$ nên

$$(N_1, 2) = (N_2, 5) = (N_3, 7) = (N_4, 9) = 1.$$

Tồn tại các số $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 6, x_4 = 4$ là các nghiệm của phương trình $N_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.

Do đó

$$x = 315 \times 1 \times 1 + 126 \times 1 \times 2 + 90 \times 6 \times 3 + 70 \times 4 \times 4$$

$$= 315 + 252 + 1620 + 1120 = 3307.$$

Trừ 3307 năm lần cho $2 \times 5 \times 7 \times 9 = 630$ được nghiệm nhỏ nhất là 157.

Nhận xét Đây là bài giải hệ 4 phương trình đồng dư, không thấy có trong các sách toán Hán - Nôm, thậm chí hiếm thấy trong các tài liệu toán hiện nay của Việt Nam.

Giải bài 2.1.5:¹⁰

Thảo rằng: Đếm 3 thừa 2 viết xuống 140, đếm 5 thừa 3 viết xuống 63, 7 không thừa không viết xuống. Gộp lại được 203, trừ 105 còn 98 người. Lấy 200 nhân với số người được số tiền, số người chia 7 được số rượu, chia 3 được số thịt.

Giải thích 1 cân = 16 lạng; 1 lạng = 24 thù, vậy 1 cân = $16 \times 24 = 384$ thù; mỗi lần chia 1 cân = 384 thù cho 3 người, mỗi người được 128 thù. Gọi số người là x và y_1 là số lần chia thịt (không kể lần cuối chia bị thừa), mỗi lần chia 1 cân = 384 thù cho 3 người, cứ mỗi 3 người được chia 1 cân thịt thì thừa 5 lạng 8 thù = 128 thù = $1/3$ cân, vậy phải thêm 2 người cuối cùng nhận $2/3$ cân = 256 thù. Theo bài ra ta có:

$$384y_1 + 256 = 128x \Leftrightarrow 3y_1 + 2 = x$$

Nghĩa là $x \equiv 2 \pmod{3}$.

1 quan = 1000 tiền, chia cho 5 người thì mỗi người nhận 200 tiền. Gọi y_2 là số lần chia tiền (không kể lần cuối thừa 400, tức là thêm 3 người nhận mỗi người 200). Theo bài ra ta có

$$1000y_2 + 600 = 200x \Leftrightarrow x = 5y_2 + 3$$

hay $x \equiv 3 \pmod{5}$.

i Gọi s là số lần đã rót rượu, mỗi lần rót 7 cho 7 người (thu chén lại để rót cho người khác).

Kí hiệu a, b, c là ước số chung lớn nhất của ba

<https://doi.org/10.52111/qnjs.2022.16401>

Và không có số người dư, tức là $x = 7y_3$. Ta có hệ

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

Đặt

$$N_1 = 5 \times 7 = 35;$$

$$N_2 = 3 \times 7 = 21;$$

$$N_3 = 3 \times 5 = 15.$$

Vì $(5, 7) = (3, 7) = (3, 5) = 1$ nên

$$(N_1, 3) = (N_2, 5) = (N_3, 7) = 1.$$

Tồn tại các số $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$ là các nghiệm của phương trình $N_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. Vậy

$$\begin{aligned} x &= 35 \times 2 \times 2 + 21 \times 1 \times 3 + 15 \times 1 \times 0 \\ &= 140 + 63 = 203 - 3 \times 5 \times 7 = 203 - 105 = 98. \end{aligned}$$

Đáp: 98 người; 7 người hứng rượu một lần, 98 người bằng 14 lần hứng rượu; 3 người một cân thịt, $98 = 32 \times 3 + 2$. Vậy số thịt chỉ ra là 32 cân 256 thùy = 32 cân 10 lạng 16 thùy; 5 người 1 quan tiền, mỗi người được 200 tiền, $98 = 19 \times 5 + 3$. Vậy 98 người được 19 quan 600 tiền.

Bài 2.1.6 (Tần Cửu Thiệu, Bài 9, Chương 1)^{2,3}
Tìm x biết

$$x \equiv 1 \pmod{19} \equiv 14 \pmod{17} \equiv 1 \pmod{12}.$$

Giải Ta có hệ

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{19} \\ x \equiv 14 \pmod{17} \\ x \equiv 1 \pmod{12} \end{cases}$$

Đặt

$$N_1 = 17 \times 12 = 204;$$

$$N_2 = 19 \times 12 = 228;$$

$$N_3 = 19 \times 17 = 323.$$

Vì $(17, 12) = (19, 12) = (19, 17) = 1$ nên

$$(N_1, 19) = (N_2, 17) = (N_3, 12) = 1.$$

Tồn tại các số $x_1 = 15, x_2 = 5, x_3 = 11$ là các nghiệm của các phương trình $N_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.
Vậy

$$x = 204 \times 15 \times 1 + 228 \times 5 \times 14 + 323 \times 11 \times 1 = 22573.$$

Trừ 22573 cho năm lần $19 \times 17 \times 12 = 3876$ được nghiệm nhỏ nhất là 3193.

Tần Cửu Thiệu là người đầu tiên đã đưa ra thuật giải hệ phương trình đồng dư,³ sau này được phương Tây gọi là *Định lý Trung Quốc về phần dư* (The Chinese Remainder theorem). Ông cũng đã xét cả các trường hợp khi các m_i là các số không nhất thiết nguyên tố cùng nhau bằng cách đưa về trường hợp các m_i là các số nguyên tố cùng nhau, hoặc các bài toán đồng dư với phân số hoặc số dư âm. Ông nhận xét: Nếu a, b, c là các số tự nhiên thì

$$x \equiv \frac{b}{a} \pmod{\frac{c}{a}} \Leftrightarrow ax \equiv b \pmod{c}.$$

Thật vậy, $x \equiv \frac{b}{a} \pmod{\frac{c}{a}} \Leftrightarrow$ Tồn tại số nguyên y sao cho

$$x = \frac{c}{a}y + \frac{b}{a} \Leftrightarrow ax = cy + b \Leftrightarrow ax \equiv b \pmod{c}.$$

Dưới đây chúng tôi chỉ nêu đầu bài một số bài toán, lời giải có thể xem trong.^{2,3}

Bài 2.1.7 (Tần Cửu Thiệu, Bài 5, Chương 1)^{2,3}
Tìm x biết

$$x \equiv 0 \pmod{54} \equiv 0 \pmod{57} \equiv 51 \pmod{75} \equiv 18 \pmod{72}.$$

Bài 2.1.8 (Tần Cửu Thiệu, Bài 5, Chương 1)^{2,3}
Tìm x biết

$$x \equiv 0.32 \pmod{0.83} \equiv 0.70 \pmod{1.10} \equiv 0.30 \pmod{1.35}.$$

Nhận xét Hệ trên tương đương với

$$100x \equiv 32 \pmod{83} \equiv 70 \pmod{110} \equiv 30 \pmod{135}.$$

Bài 2.1.9 (Tần Cửu Thiệu, Bài 8, Chương 1)^{2,3}
Tìm x biết

$$\begin{aligned} x &\equiv -60 \pmod{130} \equiv -30 \pmod{110} \\ &\equiv -10 \pmod{120} \equiv -10 \pmod{60} \equiv 10 \pmod{25} \\ &\equiv 10 \pmod{100} \equiv 10 \pmod{30} \equiv 10 \pmod{20}. \end{aligned}$$

Bài 2.1.10 (Tần Cửu Thiệu, Bài 3, Chương 2)^{2,3}
Bài toán này có nguồn gốc từ bài toán thiên văn và tính toán lịch. Tìm x biết

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod{365 \frac{4108}{16900}} \equiv 11 \frac{7540}{16900} \pmod{60} \\ &\equiv 10 \frac{7264}{16900} \pmod{29 \frac{8967}{16900}}. \end{aligned}$$

2.2. Định lí Trung Quốc về phần dư trong các sách toán Hán – Nôm

2.2.1. Tìm bội số chung nhỏ nhất của ba số

Ta bắt đầu bằng một bài toán dưới dạng thơ trong cuốn sách chữ Hán *Đại thành toán học chỉ minh* của Phạm Gia Kỳ (tò 52a).¹⁴

Bài 2.2.1

Phiên âm chữ Hán:

*Trương gia tam nữ hiếu thuận
Quy ninh bắt đạn cần lao
Đông thôn đại nữ cách tam triều
Ngũ nhật Tây thôn nữ đáo
Tiểu nữ Nam hương vọng viễn
Y nhiên thất nhật nhất tao
Hà thời tề chí ẩm thuần lao
Thỉnh vấn toán ông hồi báo.*

Dịch:

Họ Trương ba gái hiếu thuận
Về thăm không ngại cần lao
Gái cả thôn Đông cách ba sáng
Năm ngày gái thôn Tây đến
Gái út quê Nam ngóng xa
Cũng vậy bảy ngày một gặp
Lúc nào cùng tới uống rượu nồng
Xin hỏi ông toán trả lời.

Giải¹⁴ Lấy “3 sáng”, “5 ngày” nhân với nhau được 15 ngày. Lại nhân với 7 được 105 ngày là ba con gái cùng tới.

Lời bình Đây là bài toán tìm bội số chung nhỏ nhất (BSCNN) của ba số 3, 5, 7. Bài toán tìm BSCNN hiện nay được giảng dạy trong chương trình toán lớp 6.

2.2.2. Định lí Trung Quốc về phần dư trong “Ý Trai toán pháp nhất đắc lục”

Trong Chương 6 của cuốn sách *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*, dạng toán *Vật bất tri kì số* được gọi là dạng toán *Dĩ dư số tri nguyên số* (Từ số dư tìm ra số ban đầu).

Bài thơ dưới đây trong *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* là một phiên bản của bài *Hàn Tín điểm binh*.

Bài 2.2.2 (Dĩ dư số tri nguyên số cổ ca - Bài ca cổ: Từ số dư biết được số ban đầu), trang 115).⁸

三人同行七十稀

五樹梅花廿一枝

七子團圓秋夜月

百零五壽定爲期

Phiên âm:

*Tam nhân đồng hành thất thập hi
Ngũ thụ mai hoa chấp nhất chi
Thất tử đoàn viên thu dạ nguyệt
Bách linh ngũ thọ định vi kì.*

Giải thích của Nguyễn Hữu Thận⁸

Tam nhân đồng hành thất thập hi: Ba người đồng hành hiếm được 70: Số 70 chia hết cho 5 và 7, và chia cho 3 dư 1, nên gọi là *phép tam số*.

Ngũ thụ mai hoa chấp nhất chi: Năm cây hoa mai 21 cành: số 21 chia hết cho 3, cho 7, và chia cho 5 dư 1, cho nên gọi là *phép ngũ số*.

Thất tử đoàn viên thu dạ nguyệt: Bảy người con đoàn viên đêm trăng thu (ngày rằm 15): Số 15 chia hết cho 3, cho 5, và chia cho 7 dư 1, cho nên gọi là *phép thất số*.

Bách linh ngũ thọ định vi kì: Trăm linh năm (105) đã định, đem chia cho 3, cho 5, cho 7 đều không dư, nên dùng làm phép trừ.

Giải thích: “Trừ trăm linh năm”: 105 là bội số chung nhỏ nhất của 3, 5, 7. Trừ bớt 105 (cắt đứt theo Dương Huy) để được nghiệm nhỏ nhất.

Sau khi giải thích từng câu thơ và giải bài *Hàn Tín điểm binh*, Nguyễn Hữu Thận đã phát biểu một số bài toán mới, tương tự như bài *Vật bất tri kì số*, mà chúng tôi chưa tìm thấy trong các sách toán Trung Hoa, có lẽ do chính Nguyễn Hữu Thận sáng tác khi nghiên cứu bài *Vật bất tri kì số*.

Các bài toán 1.2.3 - 1.2.12 được lấy từ *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*.⁸ Để tiện trình bày, chúng tôi sử dụng ngôn ngữ hiện đại trong phát biểu bài toán và lời giải.

Bài 2.2.3 Tìm số nhỏ nhất biết khi chia nó cho 3, cho 5, cho 7 đều dư 1.

Giải Gọi x là số cần tìm. Khi ấy $x - 1$ chia hết cho 3, 5, 7. Chứng tỏ $x - 1$ là BSCNN của 3, 5 và 7. Suy ra $x - 1 = 3 \times 5 \times 7 = 105$.

Vậy $x = 106$

Bài 2.2.4 Tìm số nhỏ nhất biết khi chia nó cho 3, cho 7, cho 11 đều dư 1.

Giải Gọi x là số cần tìm. Khi ấy $x - 1$ chia hết cho 3, 7, 11. Chứng tỏ $x - 1$ là BSCNN của 3, 7 và 11. Suy ra $x - 1 = 3 \times 7 \times 11 = 231$.

Vậy $x = 232$.

Bài 2.2.5 Tìm số nhỏ nhất biết khi chia nó cho 5, cho 7, cho 9 đều dư 1.

Giải Gọi x là số cần tìm. Khi ấy $x - 1$ chia hết cho 5, 7, 9. Chứng tỏ $x - 1$ là BSCNN của 5, 7 và 9. Suy ra $x - 1 = 5 \times 7 \times 9 = 315$.

Vậy $x = 316$.

Bài 2.2.6 Tìm số nhỏ nhất biết khi chia nó cho 7, cho 9, cho 11 đều dư 1.

Giải Gọi x là số cần tìm. Khi ấy $x - 1$ chia hết cho 7, 9, 11. Chứng tỏ $x - 1$ là BSCNN của 7, 9 và 11. Suy ra $x - 1 = 7 \times 9 \times 11 = 693$.

Vậy $x = 694$.

Bài 2.2.7 Tìm số nhỏ nhất biết khi chia nó cho 7, cho 11, cho 15 đều dư 1.

Giải Gọi x là số cần tìm. Khi ấy $x - 1$ chia hết cho 7, 11, 15. Chứng tỏ $x - 1$ là BSCNN của 7, 11 và 15. Suy ra $x - 1 = 7 \times 11 \times 15 = 1155$.

Vậy $x = 1156$

Bài 2.2.8 Tìm số nhỏ nhất biết khi chia nó cho 9, cho 11, cho 13 đều dư 1.

Giải Gọi x là số cần tìm. Khi ấy $x - 1$ chia hết cho 9, 11, 13. Chứng tỏ $x - 1$ là BSCNN của 9, 11 và 13. Suy ra $x - 1 = 9 \times 11 \times 13 = 1287$.

Vậy $x = 1288$

Bài toán sau đây thường được sử dụng trong các kì thi học sinh giỏi Trung học Cơ sở cấp Tỉnh.

Bài 2.2.9 Tìm số nhỏ nhất biết khi chia nó cho 3 thì dư 1, chia cho 5 thì dư 2, chia cho 7 dư 3.

Cách giải 1 (BSCNN) Gọi x là số cần tìm. Khi ấy $x - 1$ chia hết cho 3, $x - 2$ chia hết cho 5, $x - 3$ chia hết cho 7. Suy ra $2(x - 1)$ cũng chia hết cho 3, $2(x - 2)$ cũng chia hết cho 5, $2(x - 3)$ cũng chia hết cho 7. Chứng tỏ

$2x + 1 = 2(x - 1) + 3 = 2(x - 2) + 5 = 2(x - 3) + 7$ chia hết cho 3, cho 5, cho 7 hay $2x + 1 = 105$.

Suy ra $x = 52$.

Nhận xét Lời giải trên đòi hỏi *đôi chút sáng tạo* (thi học sinh giỏi THCS). Tuy nhiên, nếu biết thuật giải hệ phương trình đồng dư thì chỉ cần áp dụng Định lí Trung Quốc về phần dư mà *không cần phải sáng tạo*.

Cách giải 2 (Giải hệ phương trình đồng dư) Gọi x là số cần tìm. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

Đặt

$$N_1 = 5 \times 7 = 35;$$

$$N_2 = 3 \times 7 = 21;$$

$$N_3 = 3 \times 5 = 15.$$

Vì $(5, 7) = (3, 7) = (3, 5) = 1$ nên

$$(N_1, 3) = (N_2, 5) = (N_3, 7) = 1.$$

Tồn tại các số $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$ là các nghiệm của các phương trình $N_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.
Vậy

$$x = 35 \times 2 \times 1 + 21 \times 1 \times 2 + 15 \times 1 \times 3 = 70 + 42 + 45 = 157 = 3 \times 5 \times 7 + 52.$$

Đáp: Số nhỏ nhất thỏa mãn điều bài là 52.

Nhận xét Các bài toán trên thực chất chỉ cần dùng khái niệm Bội số chung nhỏ nhất. Tuy nhiên, các Bài toán dưới đây trong⁸ đòi hỏi phải biết vận dụng Định lí Trung Quốc về phần dư.

Bài 2.2.10 Giả sử có một số người. Xếp hàng 7 thì dư 1, xếp hàng 11 thì dư 3, xếp hàng 15 dư 4. Hỏi số người là bao nhiêu?

Giải Gọi x là số cần tìm. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$$

Đặt

$$N_1 = 11 \times 15 = 165;$$

$$N_2 = 7 \times 15 = 105;$$

$$N_3 = 7 \times 11 = 77.$$

Vì $(7, 11) = (7, 15) = (11, 15) = 1$ nên

$$(N_1, 7) = (N_2, 11) = (N_3, 15) = 1.$$

Tồn tại các số $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 8$ là các nghiệm của phương trình $N_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. Vậy

$$x = 165 \times 2 \times 1 + 105 \times 2 \times 3 + 77 \times 8 \times 4 = 3421 \\ = (7 \times 11 \times 15) \times 2 + 1114.$$

Đáp: 1114 người.

Bài 2.2.11 Giả sử có một số lính bắn cung, chia thành từng cặp tập bắn trong ba ngày. Ngày thứ nhất cặp 7 người thì dư 6 người. Ngày thứ hai cặp 11 người thì dư 10 người. Ngày thứ ba cặp 15 người cũng dư 10 người. Hỏi số người là bao nhiêu?

Giải Gọi x là số cần tìm. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 10 \pmod{11} \\ x \equiv 10 \pmod{15} \end{cases}$$

Đặt

$$N_1 = 11 \times 15 = 165;$$

$$N_2 = 7 \times 15 = 105;$$

$$N_3 = 7 \times 11 = 77.$$

Vì $(7, 11) = (7, 15) = (11, 15) = 1$ nên

$$(N_1, 7) = (N_2, 11) = (N_3, 15) = 1.$$

Tồn tại các số $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 8$ là các nghiệm của phương trình $N_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. Vậy

$$x = 165 \times 2 \times 6 + 105 \times 2 \times 10 + 77 \times 8 \times 10 = 10240 \\ = 7 \times 11 \times 15 \times 8 + 1000.$$

Đáp **Đáp:** 1000 lính.

Bài 2.2.12 Giả sử có binh lính ăn cơm 3 lần. Lần thứ nhất xếp 9 người một bàn thì thừa 3 người. Lần thứ hai xếp 11 người một bàn thì thừa 1 người. Lần thứ ba xếp 13 người một bàn thì thừa 4 người. Hỏi số người là bao nhiêu.

Giải Gọi x là số cần tìm. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{9} \\ x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 4 \pmod{13} \end{cases}$$

Đặt

$$N_1 = 11 \times 13 = 143;$$

$$N_2 = 9 \times 13 = 117;$$

$$N_3 = 9 \times 11 = 99.$$

Vì $(9, 11) = (9, 13) = (11, 13) = 1$ nên

$$(N_1, 9) = (N_2, 11) = (N_3, 13) = 1.$$

Tồn tại các số $x_1 = 8, x_2 = 8, x_3 = 5$ là các nghiệm của phương trình $N_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. Vậy

$$x = 143 \times 8 \times 3 + 936 \times 8 \times 1 + 99 \times 5 \times 4 = 6348 \\ = 9 \times 11 \times 13 \times 4 + 1200.$$

Đáp **Đáp:** 1200 người.

2.2.3. Định lý Trung Quốc về phân dư trong “Toán pháp đại thành” và một số sách khác

Có thể khẳng định rằng người Việt Nam biết đến bài toán *Điểm binh pháp* (phép điểm binh) qua cuốn sách *Toán pháp đại thành*⁷ được coi là của Lương Thế Vinh. Tuy nhiên, cuốn *Toán pháp đại thành* hiện nay còn lưu trữ chỉ là bản chép lại và bài *Điểm binh pháp*⁷ không có lời giải.

Bài 4.2b Điểm binh pháp (*Toán pháp đại thành*, Bản B, tờ 64a; Bản A, tờ 115a):⁷

点兵法

三人同行七十推

五樹枚花廿一枝

七人同行收半月

除百除五定為期

Phiên âm:

Điểm binh pháp

Tam nhân đồng hành thất thập suy

Ngũ thụ mai hoa chấp nhất chi
Thất nhân đồng hành thu bán nguyệt
Trừ bách trừ ngũ định vi kỳ.

Dịch:

Phép điểm binh

Ba người cùng đi ít bảy chục
Năm cây hoa mai 21 cành
Bảy con đoàn viên đêm trăng thu
Trừ trăm linh năm biết số thành.

Nhận xét: *Toán pháp đại thành* (được coi là của Lương Thế Vinh) gọi bài toán này là *Điểm binh pháp*, không gọi là *Hàn Tín điểm binh* như Trình Đại Vị (1592). Điều này là cơ sở để tin rằng *Toán pháp đại thành* hiện tồn (hai bản chép tay, một bản trước năm 1934 và một bản năm 1944) có bóng dáng *Toán pháp đại thành* của Lương Thế Vinh (1441 - 1496).

Hoàng Xuân Hãn⁹ đã chép lại bài Hàn Tín điểm binh từ sách *Toán pháp thống tông* của Trình Đại Vị và viết:⁹ Bài thơ này của Trình Đại Vị đời nhà Minh, dùng chữ sách có dính líu đến những chữ cần biết. Như ở câu đầu là dùng “tam nhân đồng hành tất hữu ngũ sư” [ba người cùng đi tất có người là thầy ta] và câu “nhân sinh thất thập cổ lai hi” [Người bảy mươi xưa nay hiếm]. Và Ông xin dịch đối lại như sau này cho dễ hiểu:

Ba người cùng hàng, nhân bảy mươi.
Năm người cùng hàng, nhân hăm mốt.
Bảy người cùng hàng, nhân mười lăm.
Trừ trăm linh năm thì tính suốt.

Nhưng rồi Hoàng Xuân Hãn cũng bình luận: *Nghĩa vẫn là tối tăm. Nhưng ta phải hiểu rằng bài thơ trên là chỉ để nhớ mấy số quan hệ trong qui tắc mà thôi.*⁹

Trong *Lập thành toán pháp* (tờ 21a)¹⁵ có bài **Vận trừ toán pháp** (Phép toán vận trừ = sắp xếp, tính toán trước):

運籌算法

三人同行七十師
五樹梅花廿一枝

七子爰排正半月
除百除五定為期

Phiên âm:

Vận trừ toán pháp

Tam nhân đồng hành thất thập sư
Ngũ thụ cảo hoa chấp nhất chi
Thất tử viên bài chính bán nguyệt
Trừ bách trừ ngũ định vi kỳ.

Trong *Toán điển trừ cửu pháp* (tờ 53b)¹⁶ cũng có bài **Vận trừ toán pháp thi** (thơ về toán vận trừ), thực chất cũng là bài *Điểm binh pháp*.

運籌算法詩

三人同行七十推
五人同行二十一支
七人同行收半月
除百除五定為期

Phiên âm:

Vận trừ toán pháp thi

Tam nhân đồng hành thất thập suy
Ngũ nhân đồng hành nhị thập nhất chi
Thất nhân đồng hành thu bán nguyệt
Trừ bách trừ ngũ định vi kì.

Trong cả ba cuốn sách^{7,15,16} đều không có lời giải.

3. KẾT LUẬN

Định lí Trung Quốc về phần dư đã được người Việt biết đến từ thời Lương Thế Vinh (1441-1496), cách đây 500 năm. Theo tư liệu sách toán Hán-Nôm hiện tồn, có thể khẳng định, Nguyễn Hữu Thân (1757-1831) là người đầu tiên trình bày chi tiết lời giải và phát biểu một số bài toán tương tự. Ông cũng đã viết rõ: “Nếu số người nhiều hơn đáp số, thì từ cách giải cũng tìm được đúng số người”.⁸ Nghĩa là, phải “cắt đứt”: trừ BSCNN của các số m_i , $i = 1, 2, \dots, k$, để được đáp số nhỏ nhất hoặc đáp số trong một khoảng nào đó. Qua khảo sát văn bản, có thể nói, các nhà toán học Việt Nam đã cảm nhận được cái hay về mặt toán học và ứng dụng trong thực tế của toán đồng dư. Tuy nhiên, người Trung Quốc còn đi xa

hơn: họ biết vận dụng định lý về đồng dư vào các bài toán thiên văn và tính toán lịch từ thế kỉ II trước Công nguyên.

Các sách toán Hán-Nôm thường đưa ra lời giải cho những bài toán thực tế, vì vậy nó vẫn còn có giá trị không chỉ trong nghiên cứu lịch sử toán học, mà còn trong giảng dạy toán kết hợp với thực tiễn, một trong các định hướng của Chương trình toán 2018 và trong các sách giáo khoa mới. Những ví dụ trong sách toán Hán-Nôm (và được giới thiệu trong bài này) vẫn có thể sử dụng trong dạy và học chuyên đề *Đồng dư* trong chương trình toán Trung học và toán Đại học hiện hành.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. 孙子算经. *Tôn Tử toán kinh*, in lại trong Trung quốc khoa học kỹ thuật điển tịch thông vụng, Quách Thư Xuân chủ biên, (Toán học, Quyển 1), Nxb Giáo dục Hà Nam, Trung Quốc, 1993 (chữ Hán).
2. S. Kangsheng. Historical Development of the Chinese remainder theorem, *Archive for History of Exact Sciences*, **1988**, 38(4), 285-305.
3. 秦九韶 T. C. Thiệu. 数书九章 *Số thư Cửu chương*, in lại trong 中国历代算学集成 Trung Quốc lịch đại toán học tập thành (tập Thượng), Nxb Nhân dân Sơn Đông, Tế Nam (chữ Hán), 1994.
4. 程大位 T. Đ. Vị. 算法統宗 *Toán pháp thống tông*, in lại trong Trung Quốc khoa học kỹ thuật điển tịch thông vụng (Toán học, quyển 2), Quách Thư Xuân chủ biên, Nxb giáo dục Hà Nam, Trung Quốc, 1993, 1217-1346 (chữ Hán).
5. N. D. Liên. Định lý thặng dư Trung Hoa và một số ứng dụng, *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, **2017**, 485, 6-12.
6. C. Ding, D. Pei, and A. Salomaa. *Chinese remainder theorem, application in computing, coding, cryptography*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1996.
7. 算法大成 *Toán pháp đại thành* (được coi là của 梁世榮 Lương Thế Vinh), Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, kí hiệu: A.2931 (trước 1934), Bản thảo bản dịch A.2931 của Cung Thị Kim Thành, 2017.
8. 阮有慎 N. H. Thận. 意齋算法一得錄 *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*, Bản viết tay, 1829. Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, A.3665, Bản thảo bản dịch của Đoàn Thị Lệ và Cung Thị Kim Thành (2015 - 2017).
9. H. X. Hãn. Hàn Tín điểm binh, *báo Khoa học*, **1943**, 2(13-14), 1-7.
10. 楊輝 D. Huy. 楊輝算法 *Dương Huy toán pháp*, in lại trong *Trung Quốc lịch đại toán học tập thành*, Nxb Nhân dân Sơn Đông, Tế Nam, 1994, quyền Thượng (chữ Hán).
11. 周密 C. Mật. 志雅堂雜鈔 *Chi nhã đường tạp sao*, 1290, quyển Hạ, in lại trong 粵雅堂叢書 Việt Nhã Đường tùng thư (tập 1), 1853 (chữ Hán).
12. J. - C. Marzloff. *History of Chinese Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
13. H. H. Khoái. *Số học*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 2004; Hà Huy Khoái. *Nhập môn Số học thuật toán*, Nxb Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1998; Hà Huy Khoái, Phạm Huy Điển. *Số học thuật toán: Cơ sở lý thuyết và tính toán thực hành*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội, 2003.
14. 范嘉紀 P. G. Kỳ. 大成算學指明 *Đại thành toán học chỉ minh*, Bản viết tay, khoảng 1840, Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, A.1555, Bản thảo bản dịch của Phạm Vũ Lộc, 2018.
15. 立成算法 *Lập thành toán pháp*, Bản viết tay. Không rõ tác giả và năm viết, Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, kí hiệu VHv.497, Bản thảo bản dịch của Phan Thị Ánh Tuyết, 2017.
16. 算田除九法 *Toán điền trừ cửu pháp*, Bản viết tay. Không rõ tác giả và năm viết, Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, kí hiệu VHb.50, Bản thảo bản dịch của Phan Thị Ánh Tuyết, 2017.