

Asymptotic behaviour of reachable sets in the singularly perturbed control systems

Nguyen Ngoc Quoc Thuong^{1,*}

¹*Faculty of Mathematics and Statistics, Quy Nhon University*

Received: 06/07/2019; Accepted: 15/10/2019

ABSTRACT

In this article, the asymptotic behavior of the reachable set of the singularly perturbed control system is investigated. The level-set method is proposed to characterize the reachable set and also its limit. The viscosity solution characteristic of the limit value function associated to the limit control problem is also given.

Keywords: *Asymptotic behavior, reachable sets, level-set method.*

*Corresponding author:
Email: nguyenngocquocthuong@qnu.edu.vn

Dáng điệu tiệm cận của tập đạt được trong hệ điều khiển nhiều kì dị

Nguyễn Ngọc Quốc Thương^{1,*}

¹Khoa Toán và Thống kê, Trường Đại học Quy Nhơn

Ngày nhận bài: 06/07/2019; Ngày nhận đăng: 15/10/2019

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của tập đạt được của hệ điều khiển nhiều kì dị. Phương pháp tập mức được sử dụng để đặc trưng tập đạt được và giới hạn của nó. Đặc trưng nghiệm nhót của hàm giá trị tối ưu giới hạn liên kết với bài toán điều khiển tối ưu giới hạn cũng được đưa ra.

Từ khóa: Dáng điệu tiệm cận, tập đạt được, phương pháp tập mức.

1. GIỚI THIỆU

Xét hệ điều khiển nhiều kì dị có dạng

$$\begin{cases} y'(s) = f(y(s), z(s), \alpha(s)), & s > 0 \\ z'(s) = \frac{1}{\varepsilon} g(y(s), z(s), \alpha(s)), & s > 0 \\ y(0) = x, \quad z(0) = \zeta. \end{cases} \quad (1.1)$$

trong đó $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow A$ là hàm đo được, $A \subset \mathbb{R}^k$ là tập con compact; $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ và $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times A \rightarrow \mathbb{R}^m$ là trường vectơ; $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \mathbb{R}^m$ là các vị trí ban đầu; $\varepsilon > 0$ là tham số nhỏ. Ký hiệu $\mathcal{A}$ là tập các hàm điều khiển

$$\mathcal{A} = \{ \alpha : [0, +\infty) \rightarrow A \mid \alpha(\cdot) \text{ đo được} \}.$$

Hệ điều khiển nhiều kì dị có dạng (1.1) nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học theo cách tiếp cận hệ động lực (xem tài liệu tham khảo)^{4,5,9-13} cũng như cách tiếp

cận phương trình đạo hàm riêng (xem tài liệu tham khảo).^{1-3,14,15} Lấy ý tưởng từ kết quả về tập đạt được cho hệ điều khiển phi tuyến trong bài báo,⁷ chúng tôi đề xuất nghiên cứu dáng điệu tiệm cận cho tập đạt được liên kết với hệ điều khiển nhiều kì dị (1.1). Phương pháp tập mức và một số kết quả gần đây trong hệ điều khiển nhiều kì dị cũng như kỹ thuật nghiệm nhót được sử dụng để khảo sát dáng điệu tiệm cận của tập đạt được nhiều kì dị.

Kết quả chính của bài báo được trình bày ở phần 3 của bài báo, đó là các Định lý 3.1, 3.2, 3.3.

Sau đây là một số giả thiết cơ bản đặt lên trên dữ kiện của hệ:

(A1) $f(y, z, a)$, $g(y, z, a)$ liên tục trên $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times A$;

(A2) $f(y, z, a)$, $g(y, z, a)$ liên tục Lipschitz

*Tác giả liên hệ chính:

Email: nguyennngocquocthuong@qnu.edu.vn

theo biến (y, z) và đều theo a ;

(A3) với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ và $\varepsilon > 0$, tập sau đây là lồi

$$\mathcal{V}^\varepsilon(x, y, A) =$$

$$\left\{ \left(f(x, y, a), \frac{1}{\varepsilon} g(x, y, a) \right) : a \in A \right\}.$$

Với các giả thiết (A1)-(A2), với mỗi $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ và $\alpha \in \mathcal{A}$ cho trước, hệ điều khiển (1.1) có nghiệm duy nhất với mọi $s \geq 0$. Nghiệm này được kí hiệu bởi $(y_{x,\zeta}^\varepsilon(s; \alpha), z_{x,\zeta}^\varepsilon(s; \alpha))$, hoặc ngắn gọn bởi $(y^\varepsilon(s), z^\varepsilon(s))$. Các thành phần $y^\varepsilon(\cdot)$ và $z^\varepsilon(\cdot)$ trong bộ $(y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot))$ được gọi tương ứng là quỹ đạo chậm và quỹ đạo nhanh của hệ (1.1).

Nhận xét 1.1. Cố định $\varepsilon > 0$ và lấy $T > 0$. Với mọi $r > 0$, tồn tại $R > 0$ sao cho với mọi hàm điều khiển $\alpha : [0, T] \rightarrow A$ và mọi $(x, \zeta) \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, quỹ đạo $(y_{x,\zeta}^\varepsilon(s; \alpha), z_{x,\zeta}^\varepsilon(s; \alpha))$ của hệ (1.1) được chứa trong $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ với mọi $s \in [0, T]$. Rõ ràng, khi đó quỹ đạo chậm $y_{x,\zeta}^\varepsilon(s; \alpha)$ cũng được chứa trong một tập compact nào đó trong $\mathbb{R}^n$, kí hiệu là Y , với mọi $s \in [0, T]$.

Nhận xét 1.2. Kí hiệu $\mathcal{S}_{[0,T]}^\varepsilon$ là tập tất cả các quỹ đạo $(y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot))$ của hệ (1.1) xác định trên $[0, T]$ với điều kiện ban đầu $y^\varepsilon(0) = x$, $z^\varepsilon(0) = \zeta$. Với giả thiết (A3) và nhận xét ở trên, ta biết rằng tập $\mathcal{S}_{[0,T]}^\varepsilon$ là compact trong $AC([0, T]; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ theo tôpô của $C([0, T]; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Kí hiệu $\mathcal{T}_{[0,T]}^\varepsilon$ là tập các quỹ đạo chậm từ cặp quỹ đạo trong $\mathcal{S}_{[0,T]}^\varepsilon$, nghĩa là,

$$\mathcal{T}_{[0,T]}^\varepsilon =$$

$$\{y^\varepsilon(s) : (y^\varepsilon(s), z^\varepsilon(s)) \in \mathcal{S}_{[0,T]}^\varepsilon, s \in [0, T]\}.$$

Khi đó, $\mathcal{T}_{[0,T]}^\varepsilon$ là tập compact trong $AC([0, T]; \mathbb{R}^n)$ theo tôpô của $C([0, T]; \mathbb{R}^n)$.

Tiếp theo ta định nghĩa tập đạt được (reachable set) cho hệ (1.1). Cho trước các tập con compact $Y_0 \subset \mathbb{R}^n$, $Z_0 \subset \mathbb{R}^m$ và tập con đóng khác rỗng $\mathcal{C} \subset Y_0$. Với mỗi $t \geq 0$, xét tập đạt được được xác định bởi

$$\mathcal{R}_\mathcal{C}^\varepsilon(t) =$$

$$\{x \in Y_0 \mid \exists \alpha \in \mathcal{A}, \zeta \in Z_0 : y_{x,\zeta}^\varepsilon(t; \alpha) \in \mathcal{C}\} \quad (1.2)$$

Đây là tập tất cả các vị trí ban đầu của quỹ đạo chậm sao cho xuất phát từ đó quỹ đạo tương ứng của hệ có thể tiến đến mục tiêu $\mathcal{C}$ tại đúng thời điểm t ứng với hàm điều khiển và vị trí ban đầu của quỹ đạo nhanh thích hợp.

Nhận xét 1.3. Ta biết rằng với giả thiết (A3), $\mathcal{R}_\mathcal{C}^\varepsilon(t)$ là tập con compact trong $\mathbb{R}^n$ với mọi $t \in [0, T]$. Đặc biệt là $\mathcal{R}_\mathcal{C}^\varepsilon(0) \equiv \mathcal{C}$.

2. XẤP XỈ QUỸ ĐẠO CHẬM

Mục tiêu chính của bài báo là nghiên cứu giới hạn, khi $\varepsilon \rightarrow 0$, của tập đạt được $\mathcal{R}_\mathcal{C}^\varepsilon(t)$. Vì tập đạt được chỉ liên quan đến quỹ đạo chậm nên ý tưởng tự nhiên là khảo sát đáng điệu tiệm cận của quỹ đạo chậm, sau đó mô tả giới hạn của tập $\mathcal{R}_\mathcal{C}^\varepsilon(t)$ thông qua giới hạn của quỹ đạo chậm.

Có một số cách xấp xỉ quỹ đạo chậm của hệ điều khiển nhiễu kì dị. Cách đầu tiên là mô hình giảm cấp cổ điển (classical reduced order model) dựa trên định lý nổi tiếng của Tikhonov. Cách thứ hai là dựa trên kĩ thuật trung bình theo biến thời gian của Gaitsgory⁹ và Grammel.¹³ Cách thứ ba là kĩ thuật trung bình theo biến trạng thái bằng cách sử dụng độ đo phân bố (occupational measures) được phát triển gần đây bởi Gaitsgory và Leizarowitz.¹¹ Trong bài báo này chúng tôi sử dụng cách thứ ba để xấp xỉ quỹ đạo chậm, sau đó dùng kết quả xấp xỉ này để nghiên cứu đáng điệu tiệm cận của tập đạt được.

Xét hệ liên kết của hệ (1.1) như sau

$$\begin{cases} z'(\tau) = g(y, z(\tau), \alpha(\tau)), & \tau > 0 \\ z(0) = \zeta, \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó $y \in \mathbb{R}^n$ là hằng số.

Ý tưởng cơ bản của việc xét hệ liên kết (2.1) là khi ε rất nhỏ (và tiến tới không), quỹ đạo $z(\cdot)$ chuyển động nhanh hơn rất nhiều so với quỹ đạo $y(\cdot)$ do đó ta có thể xem quỹ đạo $y(\cdot)$ "đứng im". Nói cách khác, ta có thể xem y như là tham số cố định trong khi đó biến trạng thái z thay đổi theo thời gian.

Dưới các giả thiết (A1)-(A2), với tham số cố định $y \in \mathbb{R}^n$, với mỗi điều khiển $\alpha \in \mathcal{A}$ và vị trí ban đầu $\zeta \in \mathbb{R}^m$, hệ (2.1) có nghiệm duy nhất $z_\zeta(\tau; \alpha, y)$ xác định trên $[0, \infty)$.

Bây giờ ta trình bày kỹ thuật trung bình theo biến trạng thái thông qua độ đo phân bố (occupational measures) được phát triển bởi Gaitsgory và Leizarowitz.¹¹ Một số bài báo liên quan theo cách tiếp cận này có thể xem trong [4], [10], [12].

Theo Nhận xét 1.1, cho trước các tập compact $Y_0 \subset \mathbb{R}^M$, $Z_0 \subset \mathbb{R}^n$ và $T > 0$, tồn tại các tập compact $Y \subset \mathbb{R}^M$, $Z_1 \subset \mathbb{R}^n$ với $Y_0 \subset Y$, $Z_0 \subset Z_1$ sao cho với mọi $(x, \zeta) \in Y_0 \times Z_0$, và với mọi $\alpha : [0, T] \rightarrow A$, nghiệm của hệ (1.1) thỏa mãn ràng buộc

$$y^\varepsilon(s, \alpha) \in Y, \quad z^\varepsilon(s, \alpha) \in Z_1, \quad \forall s \in [0, T].$$

Để xấp xỉ quỹ đạo chậm thông qua kỹ thuật trung bình, ta cần tính bị chặn của nghiệm của hệ liên kết (2.1):

(A4) Cố định $y \in Y$. Với mọi $\zeta \in Z_1$, và mọi $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow A$, tồn tại tập compact $Z \subset \mathbb{R}^n$ với $Z_1 \subset Z$ sao cho nghiệm của hệ (2.1) thỏa mãn

$$z_\zeta(\tau; \alpha, y) \in Z, \quad \forall \tau \geq 0.$$

Hệ liên kết (2.1) cũng được giả thiết thỏa mãn tính điều khiển được địa phương (local bounded-time controllability), như sau:

Định nghĩa 2.1. Hệ (2.1) được gọi là thỏa mãn tính điều khiển được địa phương nếu, với $y \in Y$ cố định, cho trước tập compact $K \subset \mathbb{R}^M$, với mọi $\zeta, \xi \in K$, tồn tại $T = T_K > 0$ và $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ sao cho $z_\zeta(\bar{t}; \bar{\alpha}, y) = \xi$, với $\bar{t} \leq T$.

Nhận xét 2.1. Lưu ý rằng, với giả thiết điều khiển được địa phương, tập Z là bất biến đối với nghiệm của hệ (2.1) với mọi $y \in Y$. Thật vậy, với mọi $\zeta \in Z$, ta có thể nối nó đến điểm ζ_1 trong Z_1 , để cho bất kỳ điểm nào trên quỹ đạo với vị trí ban đầu ζ cũng là một điểm của quỹ đạo với vị trí ban đầu ζ_1 , và do đó theo giả thiết (A4), quỹ đạo của hệ (2.1) chứa trong Z .

Bây giờ ta trình bày phương pháp trung bình để xấp xỉ quỹ đạo chậm bằng cách lấy trung bình trường vectơ chậm f theo một độ đo đặc biệt, gọi là độ đo phân bố giới hạn *limit occupational measure*, sinh bởi nghiệm của hệ liên kết (2.1). Trước tiên ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản trong lý thuyết độ đo.

Ký hiệu $\mathcal{B}(Z \times A)$ là σ -đại số các tập con Borel của $Z \times A$, và $\mathcal{P}(Z \times A)$ là tập các độ đo xác suất xác định trên $\mathcal{B}(Z \times A)$.

Định nghĩa 2.2. Dãy $\mu_n \in \mathcal{P}(Z \times A)$ được gọi là hội tụ yếu đến $\mu \in \mathcal{P}(Z \times A)$ nếu

$$\int_{Z \times A} \varphi(y, a) d\mu_n(y, a) \rightarrow \int_{Z \times A} \varphi(y, a) d\mu(y, a),$$

khi $n \rightarrow +\infty$, với mọi $\varphi \in C(Z \times A)$.

Ta trang bị metric Prokhorov ρ trên không gian $\mathcal{P}(Z \times A)$ như sau

$$\rho(\mu, \nu) := \inf \{ \varepsilon > 0 \mid \mu(Q) \leq \nu(Q^\varepsilon) + \varepsilon \},$$

trong đó infimum được lấy trên mọi tập đo được $Q \subset Z \times A$, và $Q^\varepsilon = Q + \varepsilon B$ là ε -lân cận của Q , B là quả cầu đơn vị trong $Z \times A$.

Metric như trên tương thích với tôpô yếu, theo nghĩa rằng $\mu_n \in \mathcal{P}(Z \times A)$ hội tụ yếu đến $\mu \in \mathcal{P}(Z \times A)$ nếu $\rho(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$, khi $n \rightarrow +\infty$. Không gian $\mathcal{P}(Z \times A)$, với metric ρ , là một không gian metric compact. Hơn nữa, bằng cách sử dụng metric Prokhorov, ta có thể định nghĩa khoảng cách $\rho(\mu, \Gamma)$ giữa $\mu \in \mathcal{P}(Z \times A)$ và $\Gamma \subset \mathcal{P}(Z \times A)$, và metric Hausdorff $\rho_H(\Gamma_1, \Gamma_2)$ giữa $\Gamma_1 \subset \mathcal{P}(Z \times A)$ và $\Gamma_2 \subset \mathcal{P}(Z \times A)$, như sau

$$\begin{aligned}\rho(\mu, \Gamma) &:= \inf_{\nu \in \Gamma} \rho(\mu, \nu), \\ \rho_H(\Gamma_1, \Gamma_2) &:= \\ \max \left\{ \sup_{\mu \in \Gamma_2} \rho(\mu, \Gamma_1), \sup_{\mu \in \Gamma_1} \rho(\mu, \Gamma_2) \right\}.\end{aligned}$$

Cổ định $y \in Y$. Một cặp $(z(\cdot), \alpha(\cdot))$ được gọi là chấp nhận được (admissible) của hệ (2.1) nếu $z(\cdot)$ là một nghiệm của hệ (2.1) với hàm điều khiển $\alpha \in \mathcal{A}$ và vị trí ban đầu $\zeta \in Z_1 \subset \mathbb{R}^m$ nào đó. Để ý rằng, với giả thiết (A4), với mọi $y \in Y$, $\zeta \in Z_1$, bất kỳ cặp chấp nhận được $(z(\cdot), \alpha(\cdot))$ của (2.1) đều thỏa mãn ràng buộc

$$(z(s), \alpha(s)) \in Z \times A, \quad \forall s \geq 0.$$

Định nghĩa 2.3. Cổ định $y \in Y$. Cho $(z(\cdot), \alpha(\cdot))$ là cặp chấp nhận được của hệ (2.1) xác định trên đoạn $[0, S]$, trong đó $S > 0$. Độ đo phân bố (occupational measure) $\mu_S := \mu_S^{(\alpha, \zeta, y)}$ sinh bởi $(z(\cdot), \alpha(\cdot))$ trên $[0, S]$ là độ đo xác suất trên $Z \times A$ xác định bởi

$$\mu_S := \frac{1}{S} \int_0^S \delta_{(z(s), \alpha(s))} ds, \quad S > 0,$$

trong đó $\delta_{(z(s), \alpha(s))}$ là độ đo Dirac tại điểm $(z(s), \alpha(s)) \in Z \times A$.

Cho tập con Borel $Q \subset Z \times A$, ta có

$$\mu_T(Q) = \frac{1}{S} \left| \{s \in [0, S] : (z(s), \alpha(s)) \in Q\} \right|,$$

trong đó $|E|$ là độ đo Lebesgue của tập $E \subset \mathbb{R}$.

Nhận xét 2.2. Độ đo phân bố $\mu_S := \mu_S^{(\alpha, \zeta, y)}$ phụ thuộc vào hàm điều khiển $\alpha \in \mathcal{A}$, vị trí ban đầu $\zeta \in Z_1$, và tham số $y \in Y$.

Ký hiệu $\mathcal{M}(S; \zeta, y)$ là họ tất cả các độ đo phân bố ứng với tất cả hàm điều khiển $\alpha \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{M}(S, \zeta, y) := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{\mu_S^{(\alpha, \zeta, y)}\} \subset \mathcal{P}(Z \times A).$$

Ta muốn chuyển qua giới hạn khi $S \rightarrow +\infty$. Sự tồn tại giới hạn của tập $\mathcal{M}(S, \zeta, y)$, khi $S \rightarrow +\infty$ được phát biểu trong mệnh đề sau. Kết quả này là của Gaitsgory và Leizarowitz [11].

Mệnh đề 2.1 ([11]). Giả sử (A1), (A2), (A4) được thỏa mãn và hệ (2.1) là điều khiển được địa phương. Khi đó tồn tại giới hạn theo metric Hausdorff

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \mathcal{M}(S, \zeta, y) := \mathcal{M}(y), \quad (2.2)$$

tập giới hạn $\mathcal{M}(y)$ là lồi, compact (theo tôpô yếu) trong $\mathcal{P}(Z \times A)$, và nó không phụ thuộc vào vị trí ban đầu $\zeta \in Z_1$. Sự hội tụ trong (2.2) là đều đối với (ζ, y) trong $Z_1 \times Y$, tức là

$$\rho_H(\mathcal{M}(S, \zeta, y), \mathcal{M}(y)) \leq \gamma(S),$$

với $\gamma(S) \rightarrow 0$, khi $S \rightarrow +\infty$.

Định nghĩa 2.4. Tập giới hạn $\mathcal{M}(y)$ trong định lý trên được gọi là tập độ đo phân bố giới hạn (limit occupational measures set) của hệ (2.1), và phần tử $\mu \in \mathcal{M}(y)$ được gọi là độ đo phân bố giới hạn (limit occupational measure).

Bây giờ ta giới thiệu trường vectơ suy rộng bằng cách lấy trung bình trường vectơ f thông qua độ đo phân bố giới hạn bởi công thức

$$f^r(y, \mu) := \int_{Z \times A} f(y, z, a) d\mu(z, a), \quad \mu \in \mathcal{M}(y).$$

Ta xét ánh xạ giá trị tập hợp $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$, được cho bởi

$$F(y) := \{f^r(y, \mu) : \mu \in \mathcal{M}(y)\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Bổ đề 2.1. Với các giả thiết như ở Mệnh đề 2.1, với mọi $y \in Y \subset \mathbb{R}^n$, $F(y)$ là tập con lồi, compact của $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Cố định $y \in Y$. Lấy $v_1, v_2 \in F(y)$ và $\lambda \in [0, 1]$. Tồn tại $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(y)$ sao cho

$$v_1 = f^r(y, \mu_1), \quad v_2 = f^r(y, \mu_2).$$

Lưu ý rằng, ánh xạ $\mu \mapsto f^r(y, \mu)$ là tuyến tính, và theo tính chất lồi của $\mathcal{M}(y)$, ta nhận được

$$\begin{aligned} \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 &= \\ \lambda f^r(y, \mu_1) + (1 - \lambda)f^r(y, \mu_2) &= \\ f^r(y, \lambda\mu_1) + f^r(y, (1 - \lambda)\mu_2) &= \\ f^r(y, \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2) &\in F(y). \end{aligned}$$

Do đó, $F(y)$ là lồi trong $\mathbb{R}^n$.

Lấy dãy $v_n \in F(y)$ và giả sử $v_n \rightarrow v$, khi $n \rightarrow \infty$. Ta sẽ chứng minh rằng $v \in F(y)$. Thật vậy, vì $v_n \in F(y)$ nên tồn tại dãy $\mu_n \in \mathcal{M}(y)$ sao cho $v_n = f^r(y, \mu_n)$. Bởi tính compact của tập $\mathcal{M}(y)$ trong $\mathcal{P}(Z \times A)$, tồn tại dãy con của μ_n (để cho đơn giản, ta giữ nguyên kí hiệu), sao cho

$$\mu_n \rightarrow \mu \in \mathcal{M}(y) \quad \text{hội tụ yếu, khi } n \rightarrow \infty.$$

Vì $f \in C(Z \times A)$, và bởi định nghĩa hội tụ yếu, ta được

$$\begin{aligned} v &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Z \times A} f(y, z, a) d\mu_n(z, a) \\ &= \int_{Z \times A} f(y, z, a) d\mu(z, a) \in F(y). \end{aligned}$$

Do vậy, $F(y)$ là đóng trong $\mathbb{R}^n$.

Với mọi $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in Z \subset \mathbb{R}^m$, và $a \in A$, theo giả thiết (A1)-(A2), dễ dàng kiểm tra được

$$|f(y, z, a)| \leq C(|y| + 1), \quad \text{với hằng số } C > 0.$$

Với mọi $v \in F(y)$, tồn tại $\mu \in \mathcal{M}(y)$ sao cho $v = f^r(y, \mu)$, và ta có đánh giá

$$\begin{aligned} |v| &= |f^r(y, \mu)| = \left| \int_{Z \times A} f(y, z, a) d\mu(z, a) \right| \\ &\leq \int_{Z \times A} |f(y, z, a)| d\mu(z, a) \\ &\leq C(|y| + 1). \end{aligned}$$

Do đó, $F(y)$ bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với mọi $y \in Y$. $\square$

Tiếp theo ta xét bao hàm thức vi phân

$$\begin{cases} y'(s) \in F(y(s)), & s > 0 \\ y(0) = x. \end{cases} \quad (2.3)$$

Nghiệm của (2.3) được ký hiệu bởi $y(s) := y_x(s)$, $s > 0$.

Ánh xạ giá trị tập hợp $F(\cdot)$ được giả sử thỏa mãn điều kiện liên tục Lipschitz địa phương trên $\mathbb{R}^n$, cụ thể là,

(A5) với mọi $R > 0$, tồn tại $L := L_R > 0$ sao cho

$$d_H(F(y), F(y')) \leq L|y - y'|, \quad \forall y, y' \in B(0, R).$$

Nhận xét 2.3. Điều kiện liên tục Lipschitz địa phương của ánh xạ $F(\cdot)$ là giả thiết tiêu chuẩn trong cách tiếp cận của lý thuyết bao hàm thức vi phân.

Nhận xét 2.4. Ta kí hiệu $\mathcal{S}_{[0, T]}(x)$ là tập tất cả các nghiệm liên tục tuyệt đối của bao hàm thức vi phân (2.3) xác định trên $[0, T]$,

$$\mathcal{S}_{[0, T]}(x) :=$$

$$\{y_x(s) : y_x(s) \text{ nghiệm (2.3), } s \in [0, T]\}.$$

Ta biết rằng, với giả thiết (A1), (A2), (A4), (A5) và tính điều khiển địa phương, với bất kỳ $x \in Y$, $\mathcal{S}_{[0, T]}(x)$ là tập compact trong $AC(\mathbb{R}^n)$ theo tôpô của $C(\mathbb{R}^n)$.

Quỹ đạo chậm $y^\varepsilon(\cdot)$ của hệ điều khiển nhiều kì dị (1.1) được xấp xỉ bởi nghiệm $y(\cdot)$ của bao hàm thức vi phân (2.3), như sau:

Mệnh đề 2.2 ([11]). *Giả sử (A1), (A2), (A4), (A5) được thỏa mãn và hệ (2.1) là điều khiển được địa phương. Khi đó, với mỗi nghiệm $(y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot))$ của hệ (1.1), tồn tại một nghiệm $y(\cdot)$ của (2.3) sao cho*

$$\max_{s \in [0, T]} |y^\varepsilon(s) - y(s)| \leq \omega(\varepsilon), \quad (2.4)$$

với $\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$, khi $\varepsilon \rightarrow 0$. Ngược lại, với mỗi nghiệm của (2.3), tồn tại một nghiệm của hệ (1.1) sao cho đánh giá (2.4) được thỏa mãn.

3. DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN CỦA TẬP ĐẠT ĐƯỢC

Cố định $\varepsilon > 0$ và $T > 0$. Với mỗi $(x, \zeta, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, T]$, xét bài toán tối ưu hóa dạng Mayer

$$v^\varepsilon(x, \zeta, t) := \inf_{\alpha} \varphi(y_{x, \zeta}^\varepsilon(t; \alpha)), \quad (3.1)$$

trong đó $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục Lipschitz và thỏa mãn

$$\varphi(x) \leq 0 \iff x \in \mathcal{C}. \quad (3.2)$$

Hàm φ như trên luôn tồn tại, chẳng hạn ta có thể chọn

$$\varphi(x) = d_{\mathcal{C}}(x) := d(x, \mathcal{C}) - d(x, \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}),$$

trong đó $d(x, \mathcal{C})$ là khoảng cách từ điểm x đến tập $\mathcal{C}$, và $d_{\mathcal{C}}(x)$ được biết đến là hàm khoảng cách có dấu (signed distance function) của tập $\mathcal{C}$. Chúng ta có thể kiểm tra được hàm $\varphi(x) = d_{\mathcal{C}}(x)$ là liên tục Lipschitz trong $\mathbb{R}^n$.

Hàm số $v^\varepsilon(x, \zeta, t)$ được gọi là hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu liên kết với hệ (1.1).

Kết quả đầu tiên của bài báo là mối liên hệ giữa tập đạt được $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}^\varepsilon(t)$ và bài toán điều khiển tối ưu. Cụ thể là, tập đạt được $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}^\varepsilon(t)$ có thể được mô tả như là tập mức của hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu nhiều kì dị.

Định lý 3.1. *Giả sử (A1)-(A3) được thỏa mãn. Cho trước $\varepsilon > 0$ và $T > 0$. Khi đó, với mọi $t \in [0, T]$, ta có*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{C}}^\varepsilon(t) = \{x \in Y_0 : \exists \zeta \in Z_0 \text{ sao cho } v^\varepsilon(x, \zeta, t) \leq 0\}. \quad (3.3)$$

Chứng minh. Cố định $\varepsilon > 0$, $T > 0$ và lấy $t \in [0, T]$. Giả sử $x \in Y_0$ sao cho $v^\varepsilon(x, \zeta, t) \leq 0$, với $\zeta \in Z_0$. Ta sẽ chứng minh rằng $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}^\varepsilon(t)$. Thật vậy, theo tính chất compact của tập các quỹ đạo chậm (Nhận xét 1.2), và bởi tính liên tục của φ , tồn tại điều khiển $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ sao cho

$$v^\varepsilon(x, \zeta, t) = \varphi(y_{x, \zeta}^\varepsilon(t; \bar{\alpha})) \leq 0.$$

Tính chất của φ suy ra $y_{x, \zeta}^\varepsilon(t; \bar{\alpha}) \in \mathcal{C}$, và do vậy $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}^\varepsilon(t)$.

Ngược lại, giả sử $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}^\varepsilon(t)$, khi đó tồn tại $\alpha \in \mathcal{A}$ và $\zeta \in Z_0$ sao cho $y_{x, \zeta}^\varepsilon(t; \alpha) \in \mathcal{C}$. Do đó,

$$v^\varepsilon(x, \zeta, t) \leq \varphi(y_{x, \zeta}^\varepsilon(t; \alpha)) \leq 0.$$

Phép chứng minh hoàn tất. $\square$

Với mỗi $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$, ta xét bài toán tối ưu hóa liên kết với bao hàm thức vi phân (2.3):

$$v(x, t) := \inf \varphi(y_x(t)), \quad (3.4)$$

trong đó infimum lấy theo tất cả các nghiệm $y_x(\cdot)$ của (2.3).

Bài toán (2.3)-(3.4) được gọi là bài toán điều khiển tối ưu giới hạn của bài toán điều khiển tối ưu nhiều kì dị (1.1)-(3.1).

Trong Mệnh đề 2.2, ta biết rằng quỹ đạo chậm của (1.1) được xấp xỉ bởi quỹ đạo của bao hàm thức vi phân (2.3) theo sự hội tụ đều. Kết quả xấp xỉ này đạt được bằng cách lấy trung

biến trường vectơ f theo độ đo phân bố giới hạn sinh bởi nghiệm của hệ liên kết (2.1). Dựa theo kết quả xấp xỉ này, ta có thể chứng minh sự hội tụ của hàm giá trị tối ưu v^ε đến hàm v , khi $\varepsilon \rightarrow 0$. Hơn nữa, hàm v là nghiệm nhót duy nhất của phương trình Hamilton-Jacobi equation, mà ta gọi là *phương trình giới hạn*, trong đó *Hamilton giới hạn* được biểu diễn như là toán tử Bellman, trong đó độ đo phân bố giới hạn đóng vai trò là biến điều khiển mới.

Định lý 3.2. Giả sử (A1), (A2), (A4), (A5) được thỏa mãn và (2.1) là điều khiển được địa phương. Khi đó các khẳng định sau đúng:

- (i) $v^\varepsilon(x, \zeta, t)$ hội tụ đều, khi $\varepsilon \rightarrow 0$, đến $v(x, t)$ với $x \in Y_0$, $\zeta \in Z_0$, $t \in [0, T]$. Hơn nữa, v liên tục Lipschitz trong $Y_0 \times [0, T]$.
- (ii) $v(x, t)$ là nghiệm nhót duy nhất trong lớp $UC(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ của bài toán

$$\begin{cases} v_t + \bar{H}(x, Dv) = 0, \\ v(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad (3.5)$$

trong đó $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ và

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, p) &= \max_{v \in F(x)} \{-p \cdot v\} \\ &= \max_{\mu \in \mathcal{M}(x)} \{-p \cdot f^r(x, \mu)\}. \end{aligned}$$

Nhận xét 3.1. Một kết quả nổi tiếng đã biết (xem tài liệu),⁶ bằng cách sử dụng nguyên lý quy hoạch động (dynamic programming principle), v^ε là nghiệm nhót duy nhất của phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon + H(x, \zeta, D_x v, \frac{D_\zeta v}{\varepsilon}) = 0, \\ v^\varepsilon(x, \zeta, 0) = \varphi(x), \end{cases}$$

trong đó $(x, \zeta, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times (0; T)$ và

$$H(x, \zeta, p, q) :=$$

$$= \max_{a \in A} \{-p \cdot f(x, \zeta, a) - q \cdot g(x, \zeta, a)\}.$$

Tuy nhiên để chứng minh v là nghiệm nhót của (3.5), chúng ta không thể áp dụng lập luận nghiệm nhót như thông thường vì hệ điều khiển giới hạn được mô tả bởi bao hàm thức vi phân, trong đó biến điều khiển mới μ nằm trong tập điều khiển phụ thuộc vào trạng thái $\mathcal{M}(x)$. Phép chứng minh do vậy được thừa hưởng từ kết quả của Frankowska.⁸

Chứng minh. (Định lý 3.2)

(i) Cố định $(x, \zeta, t) \in Y_0 \times Z_0 \times [0, T]$. Với mọi $\varepsilon > 0$, theo tính chất của infimum, tồn tại quỹ đạo chậm $y_{x, \zeta}^\varepsilon(t; \alpha)$ sao cho

$$\varphi(y_{x, \zeta}^\varepsilon(t; \alpha)) \leq v^\varepsilon(x, \zeta, t) + \varepsilon.$$

Theo Mệnh đề 2.2, tồn tại nghiệm $y_x(\cdot)$ của (2.3) sao cho $y_{x, \zeta}^\varepsilon(t; \alpha)$ hội tụ đều đến $y_x(t)$, as $\varepsilon \rightarrow 0$, trong $[0, T]$. Các lập luận này cùng với tính liên tục của φ , ta được

$$v(x, t) \leq \varphi(y_x(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(y_{x, \zeta}^\varepsilon(t; \alpha)) \quad (3.6)$$

$$\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v^\varepsilon(x, \zeta, t). \quad (3.7)$$

Mặt khác, theo tính chất compact của tập $\mathcal{S}_{[0, T]}(x)$, tồn tại nghiệm $y_x(\cdot)$ của (2.3) sao cho

$$v(x, t) = \varphi(y_x(t)).$$

Một lần nữa, bởi Mệnh đề Proposition 2.2, tồn tại quỹ đạo $(y_{x, \zeta}^\varepsilon(t, \alpha), z_{x, \zeta}^\varepsilon(t, \alpha))$ của (1.1) sao cho $y_{x, \zeta}^\varepsilon(t, \alpha)$ hội tụ đều đến $y_x(t)$, khi $\varepsilon \rightarrow 0$, trong $[0, T]$. Do đó

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v^\varepsilon(x, \zeta, t) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(y_{x, \zeta}^\varepsilon(t, \alpha)) \quad (3.8)$$

$$= \varphi(y_x(t)) = v(x, t). \quad (3.9)$$

Vì (3.6) và (3.8) đúng với mọi $(x, \zeta, t) \in Y_0 \times Z_0 \times [0, T]$, ta kết luận được

$$v^\varepsilon(x, \zeta, t) \rightarrow v(x, t) \text{ đều trong } Y_0 \times Z_0 \times [0, T],$$

khi $\varepsilon \rightarrow 0$.

Để chứng minh v liên tục Lipschitz trong $Y_0 \times [0, T]$, ta chỉ cần chứng minh rằng, với bất kỳ $t \in [0, T]$ cố định, $x \mapsto v(x, t)$ là liên tục Lipschitz trong Y_0 , và với bất kỳ $x \in Y_0$ cố định, $t \mapsto v(x, t)$ là liên tục Lipschitz trong $[0, T]$. Thật vậy, cố định $t \in [0, T]$, và lấy $x, \bar{x} \in Y_0$. Theo tính chất compact của tập $\mathcal{S}_{[0, T]}(\bar{x})$, tồn tại nghiệm $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(\bar{x})$ sao cho

$$v(\bar{x}, t) = \varphi(\bar{y}(t)).$$

Theo tính chất liên tục Lipschitz của φ , ta có

$$\begin{aligned} v(x, t) - v(\bar{x}, t) &= \inf_{y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(x)} \varphi(y(t)) - \varphi(\bar{y}(t)) \\ &\leq \varphi(y(t)) - \varphi(\bar{y}(t)) \\ &\leq L_\varphi |y(t) - \bar{y}(t)|, \end{aligned}$$

với mọi $y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(x)$, trong đó L_φ là hằng số Lipschitz của φ .

Hơn nữa, bằng cách áp dụng định lý của Filippov, tồn tại nghiệm $z(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(x)$ sao cho

$$|z(t) - \bar{y}(t)| \leq e^{kT} |x - \bar{x}|, \quad \forall t \in [0, T],$$

trong đó $k := k_F$ là hằng số Lipschitz của F . Từ đó suy ra

$$v(x, t) - v(\bar{x}, t) \leq L_\varphi |z(t) - \bar{y}(t)| \leq C |x - \bar{x}|,$$

trong đó $C := L_\varphi e^{kT}$.

Bằng cách thay đổi vai trò của x và $\bar{x}$, ta được

$$v(\bar{x}, t) - v(x, t) \leq C |\bar{x} - x|, \quad C := L_\varphi e^{kT},$$

và do vậy

$$|v(x, t) - v(\bar{x}, t)| \leq C |x - \bar{x}|, \quad C := L_\varphi e^{kT}.$$

Cố định $x \in Y_0$ và lấy $0 \leq t < \bar{t} \leq T$. Ta biết rằng hàm $v(x, \bar{t})$ thỏa mãn nguyên lý quy hoạch động, cụ thể là, với mọi $0 < \tau \leq \bar{t}$, ta có

$$v(x, \bar{t}) = \inf \{v(y(\tau), \bar{t} - \tau) : y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(x)\}.$$

Do đó, tồn tại nghiệm $z(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(x)$ sao cho

$$v(z(\tau), \bar{t} - \tau) \leq v(x, \bar{t}) + |\bar{t} - t|.$$

Ta có

$$\begin{aligned} |v(x, t) - v(x, \bar{t})| &\leq |v(x, t) - v(z(\tau), \bar{t} - \tau)| \\ &\quad + |v(z(\tau), \bar{t} - \tau) - v(x, \bar{t})| \\ &\leq |v(x, t) - v(z(\tau), \bar{t} - \tau)| \\ &\quad + |\bar{t} - t| \\ &= |v(x, t) - v(z(\bar{t} - t), t)| \\ &\quad + |\bar{t} - t|, \end{aligned}$$

trong đó $\tau := \bar{t} - t \in (0, \bar{t}]$. Theo chứng minh trên, tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} |v(x, t) - v(z(\bar{t} - t), t)| &\leq C |x - z(\bar{t} - t)| \\ &= C |z(0) - z(\bar{t} - t)|. \end{aligned}$$

Hơn nữa, với mọi $x \in Y_0$, nghiệm liên tục tuyệt đối $z(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(x)$ có đạo hàm bị chặn trên $[0, T]$ (xem trong phần (ii) của phép chứng minh), nên $z(\cdot)$ liên tục Lipschitz trên $[0, T]$, nghĩa là, tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho

$$|z(0) - z(\bar{t} - t)| \leq L |\bar{t} - t|.$$

Từ đánh giá trên, ta nhận được

$$|v(x, t) - v(x, \bar{t})| \leq (CL + 1) |\bar{t} - t|.$$

(ii) Như đã đề cập ở nhận xét phía trên, ta sẽ áp dụng kết quả trong [8] để khẳng định rằng v là nghiệm nhót của bài toán (3.5). Trước tiên ta kiểm tra một số giả thiết cơ bản mà ánh xạ đa trị $F(\cdot)$ được thỏa mãn:

Rõ ràng, $F(\cdot)$ là liên tục Lipschitz địa phương và nhận giá trị lồi, compact (Bổ đề 2.1).

Hơn nữa, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in Z \subset \mathbb{R}^m$, và $a \in A$, theo giả thiết (A1)-(A2), ta dễ dàng kiểm tra được

$$|f(x, z, a)| \leq C_f(|x| + 1), \text{ với hằng số } C_f > 0.$$

Với mọi $v \in F(x)$, tồn tại $\mu \in \mathcal{M}(x)$ sao cho $v = f^r(x, \mu)$, và ta có đánh giá

$$\begin{aligned} |v| &= |f^r(x, \mu)| = \left| \int_{Z \times A} f(x, z, a) d\mu(z, a) \right| \\ &\leq \int_{Z \times A} |f(x, z, a)| d\mu(z, a) \leq C_f(|x| + 1). \end{aligned}$$

Do đó

$$\sup_{v \in F(x)} |v| \leq C_f(|x| + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Bằng cách áp dụng Định lý 2.3 trong tài liệu tham khảo,⁸ ta có thể kết luận được v là nghiệm nhót của bài toán (3.5).

Để khẳng định v là nghiệm nhót duy nhất của bài toán (3.5), ta chỉ cần kiểm tra rằng Hamilton giới hạn $\bar{H}(x, p)$ thỏa mãn nguyên lý so sánh trong lý thuyết nghiệm nhót, cụ thể là điều kiện liên tục Lipschitz. Thật vậy, với mọi $x, p, q \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} |\bar{H}(x, p) - \bar{H}(x, q)| &\leq \sup_{v \in F(x)} |v \cdot (p - q)| \\ &\leq |p - q| \sup_{v \in F(x)} |v| \\ &\leq C_f(|x| + 1)|p - q|. \end{aligned}$$

Với mọi $R > 0$, $p \in \mathbb{R}^n$ và $x, y \in B(0, R)$, vì $F(x)$ là tập compact nên tồn tại $v \in F(x)$ sao cho

$$\bar{H}(x, p) = -p \cdot v.$$

Hơn nữa, vì $F(\cdot)$ liên tục trong $B(0, R)$, tồn tại $w \in F(y)$ sao cho

$$|v - w| \leq L|x - y|.$$

Ta có,

$$\bar{H}(x, p) - p \cdot w \leq -p \cdot v + \bar{H}(y, p).$$

Điều này suy ra

$$\bar{H}(x, p) - \bar{H}(y, p) \leq p \cdot (w - v)$$

$$\begin{aligned} &\leq |p||w - v| \\ &\leq L|p||x - y|. \end{aligned}$$

Một cách tương tự, bằng cách đổi vai trò của x và y , ta được

$$\bar{H}(y, p) - \bar{H}(x, p) \leq L|p||y - x|.$$

Do đó

$$\begin{aligned} |\bar{H}(x, p) - \bar{H}(y, p)| &\leq L|p||x - y| \\ &\leq L|x - y|(|p| + 1). \end{aligned}$$

Bằng cách áp dụng Định lý III.3.15 trong tài liệu,⁶ v là nghiệm nhót duy nhất của bài toán (3.5). $\square$

Như đã đề cập ở phần trước, ý tưởng tự nhiên để khảo sát đáng điệu giới hạn của tập đạt được $\mathcal{R}_C^\varepsilon(t)$ là sử dụng kết quả xấp xỉ quỹ đạo chậm, xem Mệnh đề 2.2. Từ định nghĩa của tập $\mathcal{R}_C^\varepsilon(t)$, giới hạn của $\mathcal{R}_C^\varepsilon(t)$ có dạng

$$\mathcal{R}_C(t) =$$

$$\left\{ x \in Y_0 \mid \exists y_x(\cdot) \text{ nghiệm (2.3)} : y_x(t) \in C \right\}.$$

Tuy nhiên cách định nghĩa này có thể gây khó khăn trong phép chứng minh do tính trừu tượng của bao hàm thức vi phân (2.3), sự thiếu hụt thông tin và sự phức tạp của công thức metric Hausdorff. Để vượt qua các trở ngại này, theo tinh thần của Định lý 3.1, ta đề xuất sử dụng cách tiếp cận tập mức để mô tả giới hạn của tập đạt được $\mathcal{R}_C^\varepsilon(t)$ như là vùng âm của hàm giá trị tối ưu v , nghĩa là giới hạn của tập $\mathcal{R}_C^\varepsilon(t)$ có thể được mô tả bởi

$$\tilde{\mathcal{R}}_C(t) := \{x \in Y_0 : v(x, t) \leq 0\}.$$

Định lý sau đây khẳng định tập $\mathcal{R}_C^\varepsilon(t)$ hội tụ đều đến $\tilde{\mathcal{R}}_C(t)$ trong $[0, T]$, khi $\varepsilon \rightarrow 0$, và hơn nữa tập $\tilde{\mathcal{R}}_C(t)$ trùng với tập $\mathcal{R}_C(t)$ với mọi $t \in [0, T]$.

Định lý 3.3. Giả sử (A1)-(A5) được thỏa mãn và (2.1) là điều khiển được địa phương. Khi đó, tập đạt được $\mathcal{R}_C^\varepsilon(t)$ hội tụ đều, khi $\varepsilon \rightarrow 0$, đến tập $\tilde{\mathcal{R}}_C(t)$ trên $[0, T]$, trong đó $0 < T < +\infty$. Sự hội tụ được hiểu theo nghĩa của metric Hausdorff,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_H(\mathcal{R}_C^\varepsilon(t), \tilde{\mathcal{R}}_C(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Hơn nữa,

$$\tilde{\mathcal{R}}_C(t) = \mathcal{R}_C(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Chứng minh. Để cho đơn giản, ta dùng các kí hiệu $\mathcal{R}^\varepsilon$, $\mathcal{R}$ và $\tilde{\mathcal{R}}$ thay thế cho, một cách tương ứng, $\mathcal{R}_C^\varepsilon(t)$, $\mathcal{R}_C(t)$ và $\tilde{\mathcal{R}}_C(t)$ với mọi $t \in [0, T]$. Nhắc lại rằng, khoảng cách Hausdorff giữa hai tập $\mathcal{R}^\varepsilon$ và $\tilde{\mathcal{R}}$ được xác định bởi

$$d_H(\mathcal{R}^\varepsilon, \tilde{\mathcal{R}}) = \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{R}^\varepsilon} d(x, \tilde{\mathcal{R}}), \sup_{x \in \tilde{\mathcal{R}}} d(x, \mathcal{R}^\varepsilon) \right\}.$$

Lấy dãy $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ sao cho $\varepsilon_n \rightarrow 0$, khi $n \rightarrow \infty$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$d_H(\mathcal{R}^{\varepsilon_n}, \tilde{\mathcal{R}}) \rightarrow 0, \quad \text{khi } n \rightarrow \infty.$$

Lấy $x_{\varepsilon_n} \in \mathcal{R}^{\varepsilon_n}$. Trước tiên ta chứng minh sự tồn tại của phần tử $x \in \tilde{\mathcal{R}}$ sao cho

$$|x_{\varepsilon_n} - x| \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Thật vậy, vì $x_{\varepsilon_n} \in Y_0$, $\forall n \geq 1$, tồn tại dãy con (để đơn giản, ta giữ nguyên kí hiệu) sao cho

$$x_{\varepsilon_n} \rightarrow x \in Y_0, \quad \text{khi } n \rightarrow \infty.$$

Vì $x_{\varepsilon_n} \in \mathcal{R}^{\varepsilon_n}$, theo Định lý 3.1, ta có

$$v^{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}, \zeta_{\varepsilon_n}, t) \leq 0, \quad \text{với } \zeta_{\varepsilon_n} \in Z_0.$$

Cho $n \rightarrow \infty$, và bởi sự hội tụ đều của v^ε đến v trong $Y_0 \times Z_0 \times [0, T]$, khi $\varepsilon \rightarrow 0$, ta nhận được

$$v(x, t) \leq 0.$$

Do vậy, $x \in \tilde{\mathcal{R}}$. Tức là ta đã chứng minh được

$$\sup_{x_{\varepsilon_n} \in \mathcal{R}^{\varepsilon_n}} d(x_{\varepsilon_n}, \tilde{\mathcal{R}}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Tiếp theo, lấy $x \in \tilde{\mathcal{R}}$. Vì $x \in Y_0$, và Y_0 là tập compact, tồn tại dãy con trong Y_0 , kí hiệu là x_{ε_n} , $x_{\varepsilon_n} \neq x$, $\forall n \geq 1$ sao cho

$$x_{\varepsilon_n} \rightarrow x, \quad \text{khi } n \rightarrow \infty.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $x_{\varepsilon_n} \in \mathcal{R}^{\varepsilon_n}$. Thật vậy, bởi kết quả hội tụ đều, với mọi $\zeta \in Z_0$, và bất kì $\delta > 0$, tồn tại $n_0 > 0$ sao cho với mọi $n \geq n_0$,

$$v^{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}, \zeta, t) \leq v(x_{\varepsilon_n}, t) + \delta.$$

Vì $x \in \tilde{\mathcal{R}}$, nên $v(x, t) \leq 0$. Bởi tính chất liên tục của v , ta được $v(x_{\varepsilon_n}, t) \leq 0$ với n đủ lớn. Hơn nữa, vì $\delta > 0$ có thể được chọn bé tùy ý, cho $\delta \rightarrow 0$, ta được

$$v^{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}, \zeta, t) \leq 0, \quad \text{với } n \text{ đủ lớn.}$$

Do vậy, $x_{\varepsilon_n} \in \mathcal{R}^{\varepsilon_n}$ với n đủ lớn, và do đó

$$\sup_{x \in \tilde{\mathcal{R}}} d(x, \mathcal{R}^{\varepsilon_n}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Vậy,

$$d_H(\mathcal{R}^{\varepsilon_n}, \tilde{\mathcal{R}}) \rightarrow 0,$$

với mọi dãy $\varepsilon_n \rightarrow 0$, khi $n \rightarrow \infty$. Do đó,

$$d_H(\mathcal{R}^\varepsilon, \tilde{\mathcal{R}}) \rightarrow 0, \quad \text{khi } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Bây giờ ta chứng minh phần thứ hai của định lý. Lấy $x \in \tilde{\mathcal{R}}$, khi đó

$$v(x, t) \leq 0.$$

Theo tính chất compact của tập các nghiệm của bao hàm thức vi phân (2.3) (Xem Nhận xét 2.4), tồn tại nghiệm $\bar{y}_x(\cdot)$ of (2.3) sao cho

$$v(x, t) = \varphi(\bar{y}_x(t)) \leq 0.$$

Do đó, $\bar{y}_x(t) \in \mathcal{C}$, và do vậy $x \in \mathcal{R}$.

Ngược lại, giả sử $x \in \mathcal{R}$. Tồn tại nghiệm $\bar{y}_x(\cdot)$ của (2.3) sao cho $\bar{y}_x(t) \in \mathcal{C}$, do đó $\varphi(\bar{y}_x(t)) \leq 0$. Điều này suy ra

$$v(x, t) := \inf \varphi(y_x(t)) \leq \varphi(\bar{y}_x(t)) \leq 0.$$

Do vậy, $x \in \tilde{\mathcal{R}}$. $\square$

Nhận xét 3.2. Với các giả thiết (A1), (A2), (A4), (A5) và tính điều khiển được địa phương, ta dễ dàng kiểm tra được các tập $\tilde{\mathcal{R}}_c(t)$ và $\mathcal{R}_c(t)$ là đóng, và do đó compact trong $\mathbb{R}^n$ với mọi $t \in [0, T]$. Trong khi đó giả thiết (A3) là cần thiết để đảm bảo tính chất đóng của tập $\mathcal{R}_c^\varepsilon(t)$, với $t \in [0, T]$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. O. Alvarez, M. Bardi. Viscosity solutions methods for singular perturbations in deterministic and stochastic control. *SIAM J. Control Optim.*, **2001**, 40 (4), 1159-1188.
2. O. Alvarez, M. Bardi. Singular perturbations of nonlinear degenerate parabolic PDEs: a general convergence result. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **2003**, 170 (1), 17-61.
3. O. Alvarez, M. Bardi. Ergodicity, stabilization, and singular perturbations for Bellman-Isaacs equations, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **2010**, 204 (960), 1-77.
4. Z. Artstein, V. Gaitsgory. The value function of singularly perturbed control systems, *Appl. Math. Optim.*, **2000**, 41 (3), 425-445.
5. Z. Artstein. On the value function of singularly perturbed optimal control systems, *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, **2004**, December 14-17, Atlantis, Paradise Island, Bahamas.
6. M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkäuser, Boston, 1997.
7. O. Bokanowski, N. Forcadel, H. Zidani. Reachability and minimum times for state constrained nonlinear problems without any controllability assumption, *SIAM J. Control Optim.*, **2010**, 48 (7), 4292-4316.
8. H. Frankowska. Lower semicontinuous solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, *SIAM J. Control Optim.*, **1993**, 31(1), 257-272.
9. V. Gaitsgory. Suboptimization of singularly perturbed control systems, *SIAM J. Control Optim.*, **1992**, 30 (5), 1228-1249.
10. V. Gaitsgory. On representation of the limit occupational measures set of a control systems with applications to singularly perturbed control systems, *SIAM J. Control and Optimization*, **2004**, 43 (1), 325-340.
11. V. Gaitsgory, A. Leizarowitz. Limit occupational measures set for a control system and averaging of singularly perturbed control system, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **1999**, 233, 461-475.
12. V. Gaitsgory, M.T. Nguyen. Multiscale singularly perturbed control systems: Limit occupational measures sets and averaging, *SIAM J. Control and Optimization*, **2002**, 41 (3), 954-974.

13. G. Grammel. Averaging of singularly perturbed systems, *Nonlinear Anal. Theory*, **1997**, 28 (11) 1851-1865.
14. T. Nguyen, A. Siconolfi. Singularly perturbed control systems with noncompact fast variable, *J. Differential Equations*, **2016**, 261 (8), 4593-4630.
15. Nguyen Ngoc Quoc Thuong. Asymptotic behaviour of singularly perturbed control systems in the non-periodic setting, *PhD thesis, University of Rome "La Sapienza", Rome, Italy*, **2015**.