

Applying contextual teaching and learning in teaching the concept of derivatives to enhance mathematics teachers' teaching competencies

ABSTRACT

One of the objectives of teacher education is to help future teachers develop their teaching competencies. This article introduces several issues related to contextual teaching and learning in teacher training and proposes the necessary conditions for effective teaching practices, thereby contributing to enhancing teachers' teaching capacity. It also presents a lesson plan on the concept of the derivative for students in mathematics education in the context of curriculum and textbook changes, which helps them understand the mandatory preparation process for designing learning activities. By experiencing the derivative concept in various contexts, students gain insight into its nature, historical development, and applications, while also understanding how to implement contextual teaching and learning in the future.

Keywords: *Teaching the concept of the derivative, contextual teaching and learning, teaching competencies.*

Vận dụng dạy học theo bối cảnh trong dạy học

khái niệm đạo hàm theo hướng nâng cao năng lực dạy học

cho giáo viên Toán

Vận dụng dạy học theo bối cảnh trong dạy học khái niệm đạo hàm theo hướng phát triển năng lực dạy học cho sinh viên ngành Sư phạm Toán học

Hoặc

Vận dụng dạy học theo bối cảnh trong dạy học khái niệm đạo hàm nhằm chuẩn bị năng lực dạy học cho sinh viên ngành Sư phạm Toán học

TÓM TẮT

Diễn đạt còn chung chung (một số vấn đề); diễn đạt chưa rõ "điều kiện cần cho thực hành dạy học"

Một trong những mục tiêu của đào tạo giáo viên là giúp giáo viên tương lai phát triển được năng lực dạy học. Bài báo này đề cập đến một số vấn đề của Dạy học theo bối cảnh liên quan đến công tác đào tạo giáo viên và đề xuất các điều kiện cần cho thực hành dạy học, qua đó góp phần nâng cao năng lực dạy học cho giáo viên. Bài báo cũng trình bày một kế hoạch bài dạy khái niệm đạo hàm cho sinh viên sư phạm Toán trong bối cảnh thay đổi chương trình và sách giáo khoa, nhằm giúp họ hiểu được quá trình chuẩn bị **bắt buộc** khi tiến hành thiết kế các hoạt động học tập. Thông qua việc trải nghiệm học tập khái niệm đạo hàm trong nhiều bối cảnh khác nhau, sinh viên có thể hiểu được bản chất, lịch sử hình thành và ứng dụng của khái niệm đồng thời định hướng được cách triển khai Dạy học theo bối cảnh trong tương lai.

Keywords: Dạy học khái niệm đạo hàm, dạy học theo bối cảnh, năng lực dạy học.

1. MỞ ĐẦU

Mục tiêu của chương trình (CT) giáo dục phổ thông môn Toán 2018 là giúp học sinh (HS): phát triển các phẩm chất và năng lực (NL); phát triển khả năng giải quyết các vấn đề liên môn; trải nghiệm, áp dụng Toán học vào thực tiễn; có hiểu biết về vai trò của Toán học đối với các ngành nghề trong xã hội nhằm định hướng nghề nghiệp¹,...Điều này đòi hỏi CT đào tạo giáo viên (GV) môn Toán phải giúp sinh viên (SV) có hiểu biết sâu sắc về tri thức Toán học phổ thông, từ bản chất các khái niệm đến ứng dụng của chúng trong khoa học và thực tế cuộc sống.

Bối cảnh xã hội luôn đặt ra các yêu cầu ngày càng cao cho việc dạy học. Các nhà giáo dục phải tìm kiếm các tiếp cận, phương pháp dạy học phù hợp nhằm đào tạo nhân lực đáp ứng được nhu cầu về kiến thức, kỹ năng cho xã hội. Dạy học theo bối cảnh (Contextual Teaching and Learning - CTL) là một hình thức dạy học yêu cầu GV tính đến các yếu tố như đặc điểm của tri thức, sự phát triển trí tuệ của HS, bối cảnh xã hội,...trong quá trình dạy học². Berns và Erickson² đã định nghĩa CTL là một "hình thức dạy học giúp GV liên hệ nội dung dạy

học với các tình huống của thế giới thực; và thúc đẩy HS tạo sự kết nối giữa kiến thức và các ứng dụng của nó vào cuộc sống của họ với các thành viên trong gia đình, cộng dân và người lao động đồng thời tham gia vào công việc khó khăn mà việc học tập yêu cầu". Với định nghĩa này, CTL là một lựa chọn phù hợp cho GV để thực hiện việc dạy học đạt các mục tiêu của đổi mới giáo dục trong một bối cảnh nhiều đòi hỏi của xã hội.

Trong một nghiên cứu trước³, chúng tôi đã tìm hiểu các vấn đề cơ bản về CTL và đề xuất sử dụng CTL trong dạy học nhằm nâng cao năng lực dạy học (NLDH) cho GV đồng thời phát triển NL cho HS. CTL bao hàm nhiều yếu tố cần hiểu rõ trước khi thực hiện, chẳng hạn các tiếp cận dạy học hay các **chiến lược** thực hiện CTL. Điều này phần nào gây khó khăn cho GV. Do đó, để chuẩn bị tốt hơn cho GV tương lai, chúng tôi vận dụng CTL trong dạy học cho SV sư phạm trong **các học phần phương pháp dạy học**.

Đạo hàm là một khái niệm có vai trò quan trọng trong nội bộ Toán học và được ứng dụng trong nhiều ngành khoa học khác như Vật lý, Kinh tế,...Các sách giáo khoa (SGK) môn Toán CT 2006 và 2018 đều cho HS tiếp cận khái niệm đạo hàm từ

sinh viên ngành Sư phạm Toán học

cách thức

Trình bày rõ hơn.

Làm rõ khoảng trống nghiên cứu

đề cập tới

bài toán vận tốc tức thời và để bài toán tiếp tuyến ở mục “ý nghĩa hình học của đạo hàm”. Tuy nhiên, việc giải thích tại sao một khái niệm vừa là vận tốc tức thời trong Vật lý, vừa là hệ số góc của một tiếp tuyến trong Toán học, vừa có thể là doanh thu cận biên trong Kinh tế là một việc đầy thách thức đối với GV trẻ, SV sư phạm. Bài báo này trình bày một số vấn đề về CTL trong đào tạo GV và một kế hoạch bài dạy khái niệm đạo hàm theo CTL cho SV sư phạm Toán nhằm giúp các GV tương lai hiểu và biết cách sử dụng CTL, từ đó nâng cao NLDH đồng thời hiểu bản chất của khái niệm đạo hàm và ứng dụng của nó trong các ngành khoa học để có thể giúp HS đạt được các chuẩn đầu ra như mục tiêu của CT giáo dục phổ thông 2018.

2. NỘI DUNG

Dạy học theo bối cảnh

2.1. Một số vấn đề về CTL và đào tạo GV

Từ quan điểm “GV phải được khuyến khích sử dụng các chiến lược dạy học có thể kết nối HS với việc học tập gắn với thể giới thực trong cộng đồng và nơi làm việc”, Sears và Hersh⁴ và nhiều nhà giáo dục khác đã đề xuất hình thức dạy học theo bối cảnh: “CTL là hình thức dạy học tạo điều kiện cho việc học tập mà ở đó HS sử dụng hiểu biết và khả năng học thuật của mình trong nhiều bối cảnh trong và ngoài trường học để giải quyết các vấn đề mô phỏng thực tế hoặc thực tế...”. CTL sau đó được nghiên cứu sâu hơn bởi Berns và Erickson², Crawford⁵,... và được các nhà giáo dục sử dụng trong dạy học để nâng cao NL cho HS như Maryani, Widjajanti⁶, và Selvianiresa, Prabawanto⁷.

CTL ra đời gắn với mục tiêu “chuẩn bị cho GV để nâng cao sự thành công của HS ở nơi làm việc và xa hơn nữa”⁴. Sears và Hersh⁴ cũng cho rằng “nếu GV sử dụng CTL trong dạy học thì họ phải có cơ hội trải nghiệm các CT đào tạo được thiết kế theo CTL”, từ đó đề xuất khung CT đào tạo GV gắn với CTL bao gồm 2 chiều: (1)- Các đặc trưng của CTL²⁻⁵ và (2)-Mười thành tố⁴ cần cho một CT đào tạo GV hiệu quả. Thành tố bối cảnh (contexts) là một yếu tố quan trọng phải xem xét khi thực hiện dạy học, được nghiên cứu bởi nhiều tác giả như Wedege⁸, Fordham⁹, Heuvel-Panhuizen¹⁰, Borko và Putnam¹¹. Chúng tôi đã đề xuất chia khái niệm bối cảnh thành hai loại là bối cảnh của tri thức và bối cảnh dạy học³ khi tiến hành dạy học một đối tượng tri thức toán học.

Một CT đào tạo GV theo CTL⁴ có các đặc trưng như: tập trung vào vấn đề và/hoặc phát triển khả năng giải quyết vấn đề của SV; sử dụng nhiều bối cảnh thực tế khác nhau để giảng dạy và thúc đẩy việc học tập; phát triển khả năng tự điều chỉnh việc học cho người học; sử dụng các nhóm học tập có tính tương tác để HS có thể học hỏi lẫn

nhau,... Với đặc trưng như vậy, CTL có thể giúp phát triển NL cho người học¹. Để sử dụng CTL trong dạy học, GV phải nắm được: các lý thuyết về học tập gồm thuyết kiến tạo dựa trên tri thức (knowledge-based constructivism), thuyết đa trí tuệ (incremental theory of intelligence),...; các phương pháp, tiếp cận dạy học như học tập dựa trên vấn đề (problem-based learning), học tập hợp tác (cooperative learning),...; cách lập kế hoạch bài dạy bao gồm các chiến lược dạy học REACT^{3,5} đồng thời tính đến các yếu tố như đặc điểm cá nhân của HS, môi trường văn hóa, xã hội,...; cách đánh giá xác thực quá trình học tập^{2,3}. Do đó, việc sử dụng thành thạo CTL sẽ giúp phát triển NLDH^{12,13} cho GV.

NLDH được nghiên cứu và phát triển bởi nhiều nhà giáo dục như Trịnh Thúy Giang, Mai Quốc Khánh¹² và Phạm Thị Kim Anh¹³. Theo đó, một CT đào tạo GV cần giúp SV đạt được các NL này. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng các NL được phát triển bởi Phạm Thị Kim Anh và xem xét khả năng phát triển bốn NLDH là: NL lập kế hoạch bài dạy (kế hoạch bài học), NL dạy học tích hợp, NL dạy học phân hóa và NL tổ chức các hoạt động dạy học khi cho SV trải nghiệm trong một bài học CTL.

ngành Sư phạm Toán học

Lê Thị Hoài Châu¹⁴ đã đề xuất cho SV sư phạm được tiếp xúc với các kết quả phân tích tri thức luận nhằm giúp SV về hiểu quá trình hình thành - phát triển tri thức, xây dựng được tình huống học tập đem lại nghĩa cho tri thức đồng thời làm rõ sự chênh lệch giữa tri thức cần dạy và tri thức bác học Cũng theo tác giả, để giúp tích cực hóa hoạt động học tập đồng thời phát triển NL cho HS, “điều cơ bản là phải thiết kế những tình huống tương thích với nội dung dạy học - tình huống mà kiến thức xây dựng được qua hoạt động (HĐ) giải quyết vấn đề là kiến thức cần dạy”. Và để xây dựng những tình huống đảm bảo yêu cầu này, GV có thể tìm cách “hoàn cảnh hóa lại” vấn đề vốn là nguồn gốc nảy sinh tri thức¹⁵. Điều này có nghĩa là cần đặt việc dạy học một tri thức trong một bối cảnh phù hợp nhằm đem lại nghĩa cho tri thức và ý nghĩa cho việc học tập.

Tương Duy Hải và Đỗ Hương Trà¹⁶ cho rằng nếu SV sư phạm chưa được trải nghiệm việc học tập, rèn luyện trong môi trường học tập và dạy học tích hợp thì khó có thể thực hiện dạy học tích hợp trong tương lai. Học tập liên môn là một đặc trưng của CTL^{2,3} và trải nghiệm là một trong các chiến

Cấu trúc chưa thực sự rõ ràng.

lược dạy học REACT⁵ để thực hiện CTL. Do đó, để giúp SV hiểu về CTL, thực hiện dạy học theo CTL, chúng tôi cho SV trải nghiệm các bài học môn toán tích hợp với các môn khoa học khác. Bài học về chủ đề đạo hàm một lựa chọn của chúng tôi. Khái niệm đạo hàm sẽ được đặt trong các bối cảnh làm nảy sinh khái niệm và sử dụng khái niệm để giúp SV có hiểu biết đầy đủ về đạo hàm từ định nghĩa đến ứng dụng của nó.

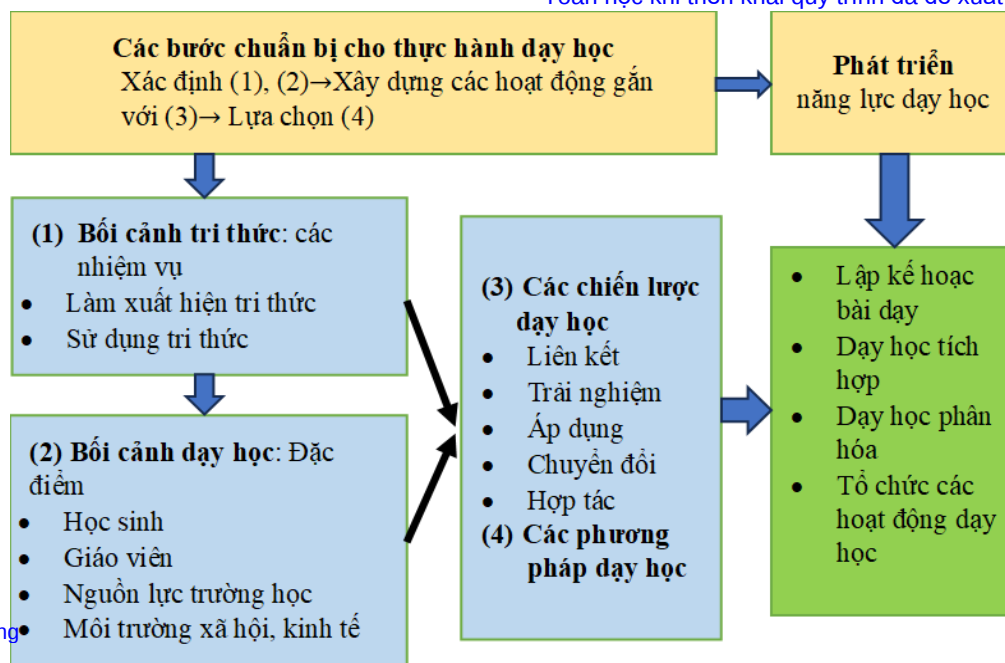
Với đặc điểm của môn Toán (“có nhiều ứng dụng trong cuộc sống, nội dung môn Toán thường mang tính logic, trừu tượng, khái quát,...”¹), SV sư phạm Toán cần hiểu rõ lí do ra đời của tri thức toán và cơ sở của những ứng dụng của nó vào đời sống. Hiểu rõ các lí do đó sẽ giúp GV có niềm tin trong việc dạy học của mình, và để giúp HS vượt qua những khó khăn trong học tập và thấy được vai

trò quan trọng của Toán học trong khoa học, đời sống. Trong phạm vi nghiên cứu của mình, chúng tôi đề xuất một số điều kiện cần cho thực hành dạy học một đối tượng tri thức cho SV sư phạm Toán trong CT đào tạo dựa trên CTL như **Hình 1**. Xác định bối cảnh của tri thức để hiểu được bản chất và vai trò của tri thức trong CT giáo dục phổ thông, từ đó đề xuất các nhiệm vụ cần giải quyết cho HS. Các nhiệm vụ này phải phù hợp với đặc điểm HS, GV, cơ sở vật chất trường học,... và được đặt trong những HĐ học tập³ (Liên kết, trải nghiệm, Áp dụng, Chuyển đổi) kèm với đó là các phương pháp dạy học nhằm phát huy NL người học. Khi đã có những chuẩn bị kĩ lưỡng, GV có thể dễ dàng tiến hành dạy học cũng như đánh giá chuẩn đầu ra của quá trình đào tạo. Do đó, các bước chuẩn bị này cho phép phát triển NLDH cho GV.

Sau các bước sẽ phân tích về tiềm năng phát triển NLDH cho sinh viên ngành Sư phạm Toán học khi triển khai quy trình đã đề xuất

Nên ghi rõ bước 1, bước 2, bước 3...

Viết hoa?



Hình 1: Các bước chuẩn bị cho thực hành dạy học

2.3. Những nghiên cứu về

~~2.2. Định hướng dạy học khái niệm đạo hàm~~

Nhờ vào khả năng giải quyết các vấn đề trong nội bộ Toán học và các ngành khoa học khác mà khái niệm đạo hàm ~~là một chủ đề~~ được nhiều nhà giáo dục nghiên cứu nhằm tìm cách dạy học hiệu quả nhất. Lê Thị Hoài Châu¹⁶ xét khả năng dạy học đạo hàm gắn với dạy học mô hình hóa và bằng mô hình hóa trong các SGK toán CT 2006. Kết quả cho thấy “khả năng vận dụng Toán học nói chung, đạo hàm nói riêng vào giải quyết những vấn đề ngoài toán học chưa được phát triển ở HS đúng mức”. Ngô

Minh Đức¹⁷ nghiên cứu dạy học tích hợp chủ đề đạo hàm và các vấn đề liên quan trong Vật lí và cho rằng vấn đề này cần được quan tâm hơn để HS thấy được vai trò của khái niệm. Bên cạnh đó, dạy học đạo hàm trong các tình huống có liên quan đến Kinh tế đã được nghiên cứu và thực nghiệm thành công bởi Lê Thái Bảo Thiên Trung và Phan Hoài Trung¹⁸. Hai tác giả này đề xuất bổ sung thêm cho HS các ứng dụng khác của đạo hàm trong Kinh tế để góp phần vào việc đổi mới toàn diện giáo dục phổ thông. Để có thể dạy học khái niệm đạo hàm

Thêm vào "này".

theo gợi ý của các nhà giáo dục toán, sinh viên sư phạm toán cần nghiên cứu bối cảnh tri thức của khái niệm đạo hàm để có thể thiết kế các nhiệm vụ học tập phù hợp.

Ở một hướng khác, Lê Thị Bạch Liên và Trần Kiên Minh¹⁹ quan tâm đến khả năng dạy học chủ đề đạo hàm của GV Toán tương lai trong nghiên cứu về kiến thức nội dung sư phạm. Kết quả thực nghiệm của nghiên cứu cho thấy: “kiến thức về việc giảng dạy ý nghĩa hình học và ý nghĩa vật lý của đạo hàm của GV là dưới mức mong đợi”; “về kiến thức nội dung CT, GV cũng thể hiện sự thiếu hụt và khó khăn để hiểu được việc học đạo hàm của HS”. Kết quả này gợi ý chúng tôi tiến hành một khảo sát đánh giá hiểu biết của SV về đạo hàm và ứng dụng của nó, tức đi xác định bối cảnh dạy học của khái niệm đạo hàm.

2.4

2.3. Bối cảnh tri thức khái niệm đạo hàm

Trong bài báo [3], chúng tôi đã định nghĩa khái niệm “bối cảnh tri thức”: là bối cảnh của những nhiệm vụ gắn với một đối tượng tri thức, bối cảnh ở đây có thể liên quan đến đời sống hằng ngày, các ngành khoa học,... có sử dụng tri thức hay làm môi trường cho tri thức nảy sinh. Theo Lê Thị Hoài Châu¹⁶, khái niệm đạo hàm xuất phát từ bài toán xác định tiếp tuyến đường cong và bài toán tìm vận tốc tức thời. Khái niệm đạo hàm có ba nghĩa: là hệ số góc của tiếp tuyến; là tốc độ biến thiên của hàm số; là công cụ xấp xỉ hàm số. Grabiner²¹ đã tóm tắt lịch sử khái niệm đạo hàm từ thời Fermat đến Weierstrass như sau “đầu tiên, đạo hàm được sử dụng, sau đó được khám phá, nghiên cứu và phát triển, và chỉ sau đó mới được định nghĩa”. Ngoài hai bài toán trên, còn có các bài toán khác làm xuất hiện khái niệm đạo hàm²¹ như: bài toán cực trị (method of finding maxima and minima); bài toán tìm diện tích của Newton. Bài toán cực trị của Fermat là bài toán khởi đầu cho sự hình thành khái niệm đạo hàm. Trong bài báo này, chúng tôi dựa vào bài toán cực trị và các bài toán khác để tạo các hoạt động học tập nhằm giúp SV hiểu được quá trình hình thành khái niệm đạo hàm, từ đó hiểu được nghĩa của nó.

Về mặt ứng dụng, đạo hàm liên quan đến việc tính toán, giải thích các khái niệm: tốc độ, vận tốc và gia tốc tức thời trong Vật lý; doanh thu cận biên, chi phí cận biên,... trong Kinh tế; tốc độ phản ứng tức thời trong Hóa học và tốc độ tăng trưởng

tức thời trong Sinh học. Các khái niệm trên có cơ sở chung là khái niệm tốc độ thay đổi tức thời (instantaneous rate of change). Theo James Stewart²³ (tr.145), giả sử y là một đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng khác x , và y là một hàm số của x , $y = f(x)$. Nếu x thay đổi từ x_1 đến x_2 ; khi đó sự thay đổi của x là $\Delta x = x_2 - x_1$ và sự thay đổi tương ứng của y là $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Giới hạn của các tốc độ thay đổi trung bình được gọi là tốc độ thay đổi tức thời của y theo x tại $x = x_1$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Trong Vật lý, khác với khái niệm tốc độ tức thời $v = v(t)$ chỉ là một đại lượng vô hướng, là đạo hàm của hàm quãng đường $s = s(t)$ thì vận tốc tức thời là đại lượng vector bao gồm độ lớn và phương, chiều. Với một chuyển động thẳng gắn với hệ trục $x'Ox$, chiều dương là Ox , độ lớn vận tốc tức thời $v = v(t) = d'(t) = x'(t)$ với $d = d(t)$, $x = x(t)$ làm phương trình (hàm) xác định độ dịch chuyển, vị trí/tọa độ của vật. Vận tốc tức thời thể hiện tốc độ tức thời $v = |v| = |v(t)| > 0$ và chiều chuyển động: $v(t) > 0$, vật chuyển động theo chiều dương; $v(t) < 0$ vật chuyển động ngược chiều dương. Đồng thời $v(t)$ bằng hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm vị trí $x = x(t)$ tại điểm $(t, x(t))$. Như vậy, GV cần hiểu rõ sự khác biệt giữa hai khái niệm tốc độ và vận tốc để từ đó hiểu vì sao khi dạy khái niệm đạo hàm cần cho nhấn mạnh đạo hàm là vận tốc tức thời, để từ đó liên kết với khái niệm hệ số góc tiếp tuyến và sau đó khi dạy ứng dụng của đạo hàm thì nhấn mạnh khái niệm tốc độ thay đổi tức thời.

“Tại sao thuật ngữ “derivative of a function f hay $f'(x)$ ” được dịch là “đạo hàm của hàm số f ?” là một câu hỏi thường gặp của các SV sư phạm Toán. Liệu các nghĩa của đạo hàm được nói ở trên có đủ trả lời câu hỏi này? Có câu trả lời nào hợp nhất các nghĩa trên? Chúng tôi sẽ tìm kiếm thêm lời giải thích bằng cách xét một chuyển động ném xiên với quỹ đạo là một đường parabol $y = f(x)$ để xem $f'(x)$ cho biết điều gì về chuyển động, đồng thời giúp có thêm tư liệu bối cảnh cho việc dạy học khái niệm đạo hàm.

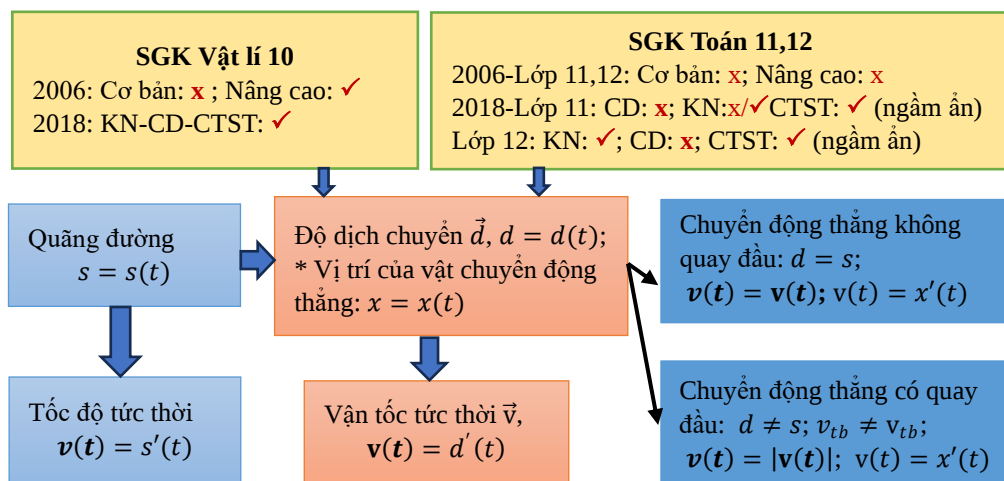
2.5

2.4. Bối cảnh dạy học chủ đề đạo hàm

Bối cảnh dạy học một tri thức³ là những vấn đề liên quan đến việc dạy học một tri thức nhưng nằm ngoài tri thức bao gồm các khía cạnh như đặc điểm HS, đặc điểm tổ chức lớp học, đặc điểm của GV,

tình huống lớp học và nguồn lực trường học,... Trong bài báo này, chúng tôi xem việc đổi mới CT giáo dục phổ thông, SGK cũng là một yếu tố của bối cảnh dạy học vì sự thay đổi này tác động lớn đến việc dạy học của GV. Từ bối cảnh của tri thức chúng tôi tiến hành phân tích các SGK Vật lí

lớp 10, 11 và SGK Toán lớp 11, 12 ở CT 2006 (bộ cơ bản và nâng cao) và CT 2018 (3 bộ sách: Kết nối tri thức với cuộc sống (KN), Cánh Diều (CD) và Chân trời sáng tạo (CTST)) để xác định những yếu tố thay đổi quan trọng ảnh hưởng đến việc dạy học khái niệm đạo hàm.



Hình 2: Ảnh hưởng của khái niệm độ dịch chuyển (x: không trình bày; ✓: trình bày)

Trong các SGK Vật lí, khái niệm độ dời chỉ học SGK Vật lí 10 nâng cao được thay bằng độ dịch chuyển và được trình bày ở cả 3 bộ SGK CT 2018. Việc thay đổi này dẫn đến việc phân biệt quãng đường và độ dịch chuyển, tốc độ và vận tốc và dạng chuyển động thẳng. Ảnh hưởng của khái niệm độ dịch chuyển thể hiện qua **Hình 2**. Như vậy, nếu một SV sư phạm Toán học CT 2006 và không học sách Vật lí nâng cao thì sẽ gặp khó khăn khi phân biệt tốc độ tức thời và vận tốc tức thời cũng như hiểu về hàm vị trí của một chuyển động thẳng. Việc hiểu về hàm vị trí/tọa độ sẽ giúp SV hiểu cách xác định phương trình vận tốc, gia tốc của một dao động điều hòa có phương trình dao động là $x = A \cos(\omega t + \varphi)$. SGK Toán 11 CTST không nói đến khái niệm độ dịch chuyển nhưng có nói đến tọa độ/ vị trí và nhấn mạnh ý nghĩa vật lí của đạo hàm: “nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 ”. Đến lớp 12, SGK CTST chỉ yêu cầu tìm quãng đường khi biết tốc độ tức thời thay vì biết vận tốc tức thời. Trong khi đó, SGK Toán lớp 11, 12 bộ CD không nói về hàm vị trí trong phần lí thuyết hay bài tập và có yêu cầu tìm quãng đường khi biết vận tốc tức thời ở lớp 12 (tr. 27). SV cần hiểu rằng các bài toán này hợp lí vì vận tốc được cho có giá trị dương. SGK Toán 11 bộ KN không nói đến độ dịch chuyển, vị trí/tọa độ ở phần lí thuyết đạo hàm nhưng đề cập vị trí và chuyển động thẳng có quay đầu ở phần bài tập. Đến lớp 12, SGK Kết nối tri thức với cuộc sống nêu rõ các khái niệm này trong phần ứng dụng của đạo hàm (tập 1) và yêu cầu HS tìm độ dịch chuyển và quãng đường

bằng tích phân khi biết vận tốc (tập 2). Như vậy, giúp SV hiểu đúng các khái niệm Vật lí liên quan đến khái niệm đạo hàm là việc cần thiết để SV biết cách tham khảo các SGK khác nhau trong dạy học, từ đó nâng cao năng lực dạy học liên môn với Vật lí.

Với các lĩnh vực khác như Kinh tế, Hóa học, Sinh học, các SGK Toán CT 2018 đã viết về lí thuyết và đưa vào nhiều bài tập để giúp HS thấy được ứng dụng của đạo hàm. Điều này đòi hỏi GV phải hiểu được lí do vì sao đạo hàm lại có mặt trong những khái niệm cận biên của Kinh tế, tốc độ phản ứng của Hóa học,... Một nghiên cứu kiến thức liên môn là cần thiết nhưng đòi hỏi nhiều thời gian và khả năng ở GV. Do đó, việc tạo các HĐ học tập giúp SV hiểu được các khái niệm ngoài Toán học liên quan đến đạo hàm là một mục tiêu của chúng tôi.

Tình trạng kiến thức của SV là một yếu tố của bối cảnh dạy học. Việc xây dựng kế hoạch bài dạy cần dựa trên hiểu biết ban đầu của SV cũng như những quan niệm của họ về tri thức. Do đó, chúng tôi tiến hành một khảo sát để đánh giá hiểu biết của SV về đạo hàm và các ứng dụng của nó. SV được khảo sát vào đại học năm 2021 nên chưa học CT mới nhưng đã được chúng tôi cho tiếp cận với CT mới, được giải thích các thay đổi so với CT cũ trong các học phần phương pháp.

2.6

2.5. Hiểu biết của SV sư phạm toán về khái niệm đạo hàm

Chỉ có tên mục ở cuối trang. Nên chuyển tên mục này sang trang sau.

Chúng tôi tiến hành khảo sát hiểu biết về khái niệm đạo hàm cùng một số khái niệm liên quan trong Vật lý, Hóa học, Sinh học và Kinh tế trên 66 SV sư phạm Toán năm thứ tư Đại học Quy Nhơn. Bảng hỏi gồm 3 câu hỏi, mỗi câu gồm nhiều nội dung nhỏ. Câu trả lời cho mỗi nội dung được đánh giá theo các mức: Không trả lời (1 điểm); Trả lời sai, chưa đúng yêu cầu (2 điểm); Trả lời đúng một phần (3 điểm) và Trả lời đúng hoàn toàn (4 điểm). Câu hỏi 1 yêu cầu SV nêu định nghĩa và công thức tính (nếu có) của 10 đại lượng: quãng đường, độ dịch chuyển; tốc độ, tốc độ tức thời; vận tốc, vận tốc tức thời; gia tốc, gia tốc tức thời và tỉ lệ thay đổi (rate of change) của một lượng $A = f(t)$ khi t thay đổi từ t_0 đến t_1 , tỉ lệ thay đổi tức thời của một lượng $A = f(t)$ tại $t = t_0$. Từ “rate of change” được chúng tôi dịch là “tỉ lệ thay đổi” ~~theo Google translate~~ (Theo từ điển The Oxford modern english dictionary (bản in năm 1997), “rate” được dịch là “tỉ lệ”) nhằm gợi ý SV lập tỉ lệ giữa hai lượng thay đổi của $f(t)$ là $f(t_1) - f(t_0)$ và của t là $t_1 - t_0$. Chúng tôi không nêu rõ tỉ lệ thay đổi trung bình mà chỉ nêu tỉ lệ thay đổi để xem SV có hiểu được tỉ lệ thay đổi của $A = f(t)$ khi t thay đổi từ t_0 đến t_1 là tỉ lệ thay đổi trung bình trên $[t_0, t_1]$ hay không, SV có thể trả lời nhờ gợi ý từ khái niệm tỉ lệ thay đổi tức thời tại $t = t_0$ đi kèm phía sau. Sang Câu 2, chúng tôi kì vọng SV kết hợp hai khái niệm tốc độ và tỉ lệ thay đổi thành cụm từ “tốc độ thay đổi”, đồng thời liên kết những hiểu biết liên môn để trả lời, giải thích các nội dung khảo sát. Câu trả lời đúng hoàn toàn thể hiện SV hiểu rõ khái niệm đạo hàm trong mối liên quan đến các khái niệm khác trong Vật lý, Hóa học, Sinh học, Kinh tế. Cụ thể, SV cần hiểu rõ các vấn đề sau: vận tốc tức thời là đạo hàm của hàm vị trí (cho biết độ dịch chuyển) của một chuyển động thẳng thay vì là đạo hàm của hàm quãng đường; tỉ lệ thay đổi tức thời tại $t = t_0$ hoặc tại $x = x_0$ của điện lượng $Q = Q(t)$ / nồng độ của chất C - $[C](t)$ trong phản ứng $A + B \rightarrow C$ / số lượng cá thể $n = f(t)$ / tổng doanh thu $R = R(x)$ / tổng chi phí $C = C(x)$ là đạo hàm của các hàm số tương ứng tại $t = t_0$ hoặc tại $x = x_0$ cùng với các tên gọi riêng là cường độ dòng điện tức thời/ tốc độ phản ứng tức thời/ **tốc** độ tăng trưởng tức thời/doanh thu cận biên/ chi phí cận biên. Câu 3 yêu cầu SV giải bài toán về một chuyển động thẳng có quay đầu với hàm vị trí $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (tr. 98, SGK Toán 11 bộ KN). Bài toán yêu cầu

tính vận tốc tại thời điểm 2 giây và 4 giây; tìm thời điểm vật đứng yên; tính gia tốc tại thời điểm 4 giây; tính quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên; thời gian vật tăng tốc, giảm tốc trong 5 giây đầu tiên. Bài tập này dựa trên Ví dụ 1, tr. 224, tài liệu 23.

Khi tham gia khảo sát, SV làm việc độc lập nhưng được phép tra cứu trên Internet. Tuy nhiên, kết quả khảo sát cho thấy cần thiết kế một kế hoạch bài dạy về chủ đề đạo hàm và các vấn đề liên quan theo hướng nâng cao hiểu biết chuyên môn và từ đó nâng cao NLDH cho GV tương lai. Kết quả Câu 1 ghi nhận hầu hết SV chỉ trả lời đúng một phần các nội dung. Các nội dung trả lời đúng hoàn toàn chỉ chiếm từ 12-42%. Điều này cho thấy SV chỉ hiểu biết ở mức độ cơ bản các khái niệm vật lý liên quan đến đạo hàm. Khái niệm tỉ lệ thay đổi trung bình và tỉ lệ thay đổi tức thời chưa được hình thành ở SV khi có đến 43,9 - 53% SV không trả lời và 10,6-15,2% SV trả lời sai, chưa đúng yêu cầu. Khái niệm độ dịch chuyển chưa được SV tìm hiểu đầy đủ khi chỉ có 15,2% SV trả lời đúng hoàn toàn, 19,7% SV không trả lời và trả lời sai. SV chưa hiểu rõ về khái niệm vận tốc khi chỉ có 23/66 SV nêu được công thức “vận tốc là thương của độ dịch chuyển và thời gian”; 7/66 câu trả lời nói rõ vận tốc là thương của quãng đường và thời gian với công thức $v = \frac{s}{t}$ và 18/66 SV chỉ nêu công thức tính vận tốc là $v = \frac{s}{t}$ trong đó s trước đó được kí hiệu là quãng đường. Đặc biệt có câu trả lời: “Trong Toán học, vận tốc bằng quãng đường chia thời gian. Trong Vật lý, vận tốc bằng độ dịch chuyển chia thời gian”.

Việc chưa hiểu các nội dung ở Câu 1 ảnh hưởng đến kết quả Câu 2. Để so sánh hiểu biết của SV ở các lĩnh vực riêng biệt, chúng tôi nhóm các câu hỏi theo bốn lĩnh vực Vật lý, Hóa học, Sinh học và Kinh tế. Điểm trung bình các nội dung liên quan đến Vật lý là 2,6648, Hóa học là 1,8030; Sinh học là 1,8258 và Kinh tế là 1,2652. Rõ ràng, vì được tiếp xúc nhiều hơn với Vật lý khi học khái niệm đạo hàm nên SV có câu trả lời đúng hơn so với 3 lĩnh vực còn lại. Tuy nhiên, SV vẫn chưa hiểu khái niệm hàm vị trí của một chuyển động khi có đến 37/66 (56,1%) SV không trả lời và trả lời sai nội dung “hàm vị trí cho biết điều gì về chuyển động?”. Điểm trung bình cho thấy SV chưa hiểu biết đầy đủ về các khái niệm cường độ dòng điện tức thời, tốc độ phản ứng tức thời, tốc độ tăng trưởng số lượng cá thể tức thời, doanh thu cận biên, chi phí cận biên. Do đó họ không nhận ra chúng là tỉ lệ thay đổi tức thời hay là đạo hàm của các hàm số tương ứng. Kết quả này cho thấy cần cho SV nghiên cứu nội hàm các khái niệm này để hiểu vì

Line spacing khác với các đoạn khác?

Line spacing

sao chúng liên quan đến đạo hàm.

Trong Câu 3, câu trả lời đúng cho nội dung “tìm quãng đường trong 5 giây đầu tiên” thể hiện am hiểu của SV về hàm vị trí, về chuyển động thẳng có quay đầu hoặc không, về sự khác nhau giữa quãng đường và độ dịch chuyển. Nội dung này đại diện cho sự thay đổi của CT giáo dục phổ thông 2018 so với CT 2006. Điểm trung bình cho nội dung này là khá thấp so với 3 nội dung còn lại: 2,15 so với 3,14, 3,26 và 3,15 (chúng tôi bỏ qua nội dung xét thời gian tăng tốc giảm tốc vì có đến 54/66 SV không trả lời, có thể do vấn đề thời gian). Kết quả thể hiện SV chưa hiểu hàm vị trí và chưa thấy hàm vị trí là sự thay đổi quan trọng của SGK Toán CT 2018 so với CT 2006 (chỉ cho biết phương trình chuyển động hay hàm quãng đường). Điều này một lần nữa nhấn mạnh sự cần thiết phải giúp SV hiểu chính xác các khái niệm liên quan đến khái niệm đạo hàm trong các lĩnh vực khác nhằm hướng đến việc dạy học ứng dụng của đạo hàm trong khoa học và đời sống cho HS.

2.7

Tên đề mục chưa khớp với nội dung.

Phải chăng tên đề mục là: Sự hình thành và các ứng dụng đa dạng của khái niệm đạo hàm? Hoặc: Tổ chức cho sinh viên các hoạt động liên kết, trải nghiệm và chuyển đổi của khái niệm đạo hàm?

Giải thích: Mục này chưa đề cập tới “kế hoạch bài dạy”.

Thời gian thực hiện như thế nào?

Bài toán này có thể không liên quan tới sự ra đời của khái niệm đạo hàm

2.6. Kế hoạch bài dạy khái niệm đạo hàm

Chúng tôi sử dụng các chiến lược REACT của CTL để thiết kế kế hoạch bài dạy khái niệm đạo hàm. Khác với đối tượng HS, được xem là chưa học tri thức mục tiêu của bài dạy, SV đã biết, thậm chí đã hiểu và ứng dụng tri thức trong quá trình học tập. Do đó bài dạy này nhằm giúp SV có cái nhìn toàn cảnh về khái niệm đạo hàm, hiểu khái niệm đến từ đâu trong lịch sử và giải thích được vì sao nó được ứng dụng nhiều trong các ngành khoa học, từ đó định hướng xây dựng các HĐ dạy học chủ đề đạo hàm phù hợp cho HS trong tương lai.

- **Hoạt động liên kết:** HĐ này yêu cầu SV vận dụng kiến thức cũ về Toán và Vật lý giải các bài toán liên quan đến sự ra đời của khái niệm đạo hàm.

Thật ra trong các bài tập dưới đây (trong mục Hoạt động liên kết) là vận dụng khái niệm đạo hàm (có thể không liên quan đến sự ra đời của khái niệm này trong Toán học).

HĐ liên kết 1:

Bối cảnh nhiệm vụ: Cho đoạn thẳng AB có độ dài b , điểm E chia đoạn AB thành hai đoạn có độ dài AE, EB sao cho hình chữ nhật kích thước $AE \times EB$ có diện tích lớn nhất. Hãy xác định vị trí điểm E.

Bối cảnh dạy học: Giảng viên có thể gợi ý cho SV khi yêu cầu họ dịch sang bài toán đại số “tìm x để hàm số $y = x(b - x)$ đạt giá trị lớn nhất”. SV có thể dùng kiến thức về hàm số bậc hai lớp 10, bất đẳng thức AM-GM hoặc đạo hàm để giải.

HĐ liên kết 2:

Bối cảnh nhiệm vụ: Trong Vật lý, dao động điều hòa của một con lắc lò xo có phương trình dao động là

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

- Hãy viết phương trình vận tốc và phương trình gia tốc của dao động.
- Theo các bạn, x có phải là quãng đường thực hiện bởi con lắc sau t giây?
- Theo các bạn, tại sao dao động điều hòa lại có phương trình dao động (1)?

Bối cảnh dạy học: x trong phương trình (1) là nghiệm của phương trình vi phân $mx'' + kx = 0$ xuất phát từ định luật II của Newton, định luật Hooke và được giải bởi Euler năm 1739. Khái niệm đạo hàm được khám phá và phát triển qua bối cảnh liên môn toán-vật lý này. Giảng viên có thể cho SV khám phá vấn đề qua các tài liệu lịch sử của Grabiner²¹, Boyer²² hoặc ~~nguyên cứu lại~~ các SGK vật lý lớp 11. Với giá trị của hàm cosin hoặc với thực nghiệm mô phỏng con lắc lò xo, SV có thể hiểu về giá trị của x , từ đó hiểu về quãng đường, độ dịch chuyển thực hiện bởi con lắc.

HĐ liên kết 3:

Bối cảnh nhiệm vụ: Xét một chuyển động trên đường thẳng có phương trình xác định tọa độ (vị trí) của vật là $x = f(t) = 2t^2 + t + 1$ với $t \geq 0$ là thời gian chuyển động.

- Tìm vận tốc trung bình của vật trên khoảng thời gian $[t, 1]$ với $t < 1$ và trên khoảng $[1, t]$ với $t > 1$.
- Tìm vận tốc tức thời $v(1)$ của vật tại thời điểm $t_0 = 1$ bằng cách xét vận tốc trung bình trên $[t, 1]$ và trên $[1, t]$ khi t rất gần với 1.
- Gọi (C) là đồ thị hàm số $x = f(t) = 2t^2 + t + 1$. Xét $P(1,4)$ và $Q(t, f(t))$ thuộc (C), với $t \neq 1$. Đường thẳng PQ được gọi là cát tuyến của đồ thị (C). Tìm hệ số góc k_{PQ} của cát tuyến PQ. So sánh k_{PQ} với kết quả câu (i).
- Viết phương trình đường thẳng d qua $P(1,4)$ và có hệ số góc $k = v(1)$. Nhận xét gì về d và (C) khi vẽ chúng trên cùng một mặt phẳng tọa độ? Hãy nêu mối liên hệ giữa hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại $P(1,4)$ và vận tốc tức thời $v(1)$.

Bối cảnh dạy học: SV được yêu cầu tìm các tài liệu cần thiết để tìm hiểu các khái niệm: độ dịch chuyển; vận tốc; các phương trình xác định quãng đường, độ dịch chuyển, tọa độ - vị trí của một chuyển động thẳng. Giảng viên có thể sử dụng phần mềm GeoGebra để minh họa đồ thị, cắt tuyến, tiếp tuyến được rõ ràng hơn. Bài toán cho phép SV hiểu ý nghĩa vật lý và ý nghĩa hình học của khái niệm đạo hàm.

HD liên kết 4:

Bối cảnh nhiệm vụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định D_f . Df được sử dụng như thế nào trong các câu (i), (ii) và (iii)?

- Nêu các công thức tính đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải của hàm số tại $x = x_0$. Hàm số có đạo hàm tại $x = x_0$ khi nào?
- Nêu định nghĩa điểm cực đại, điểm cực tiểu của hàm số.
- Chứng minh định lý Fermat: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của x_0 và đạt cực trị tại x_0 . Nếu tại x_0 hàm số có đạo hàm thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý này không liên quan đến sự ra đời của khái niệm?

Rà soát lại: Trong định lý này đã nhắc tới khái niệm đạo hàm rồi.

Bối cảnh dạy học: HD này cho phép SV nghiên cứu lại một định lý được phát hiện trước khi khái niệm đạo hàm được định nghĩa, đem lại khả năng ứng dụng cho đạo hàm (tìm giá trị cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số).

- HD trải nghiệm:** HD này giúp SV học tập bằng cách thực hành qua thăm dò, khám phá và phát minh nhằm hiểu được quá trình khái niệm đạo hàm được sử dụng, khám phá.

HD trải nghiệm 1:

Bối cảnh nhiệm vụ: Xét “phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất” của hàm số gồm các bước sau:

Cho một đại lượng y phụ thuộc vào một lượng chưa biết nào đó, ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của y .

Bước 1: Gọi lượng chưa biết là a , tính y theo a .

Bước 2: Thay thế a bằng $a + e$, tính lại y theo a và e .

Bước 3: Xét hai biểu thức tính y ở bước 2 và bước 3, các số hạng chung trong hai biểu thức được bỏ đi. Sau đó, tất cả số hạng của mỗi biểu thức chứa e (hoặc lũy thừa của e) đều được chia lần lượt cho e (hoặc lũy thừa của e) cho tới khi một số hạng nào

đó của biểu thức này hoặc biểu thức kia không còn bị ảnh hưởng bởi e .

Bước 4: Loại bỏ các số hạng chứa e (hoặc lũy thừa của e) trong cả hai biểu thức và phần còn lại của 2 biểu thức được cho bằng nhau (một trong hai biểu thức còn lại có thể bằng 0). Từ đây rút ra a , khi đó xác định được giá trị của y , chính là giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của y .

Sử dụng 4 bước trên, giải các bài toán sau:

- Bài toán ở HD liên kết 1.
- Tìm x để hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Theo các bạn, các bước giải này có cho ra đáp án đúng không? Thực chất, phương pháp này giúp tìm gì của hàm số?

Bối cảnh dạy học: Sau khi SV thực hiện HD, giảng viên giới thiệu phương pháp tìm cực trị của Fermat và vai trò của nó trong lịch sử, giải thích tên gọi “phương pháp tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất” trong HD này: vì với hai hàm số $y = x(b - x)$ và $y = x^2 - 2x + 3$ thì giá trị cực đại-cực tiểu là giá trị lớn nhất – nhỏ nhất; HD này giúp SV khám phá một phương pháp dẫn đến khái niệm đạo hàm.

HD trải nghiệm 2:

Bối cảnh nhiệm vụ:

- Sử dụng Geogebra, hãy kiểm tra tính chính xác của phát biểu sau “Một đa thức có dạng $y = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ đạt giá trị cực đại và cực tiểu khi $\sum_{k=1}^n ka_k \cdot x^{k-1} = 0$ ” bằng cách thử với nhiều đa thức khác nhau. Hãy trình bày cách kiểm tra của bạn.
- Theo các bạn, mối liên hệ giữa hai đa thức $\sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ và $\sum_{k=1}^n ka_k \cdot x^{k-1}$ là gì? Phát biểu trên có liên hệ với tính chất nào đã học?

Rà soát lại cách diễn đạt. Ở đây là một phương trình ẩn x ?

Bối cảnh dạy học: phát biểu trên được khám phá (1659) sau khi phương pháp tìm cực trị của Fermat được phổ biến²¹. Chúng tôi chọn cho SV trải nghiệm tính chất này qua GeoGebra để giúp SV hiểu cách các nhà toán học ngày xưa khám phá các tính chất thông qua các trường hợp cụ thể đồng thời giúp SV biết dùng công nghệ để dự đoán, giải quyết các vấn đề khác của Toán học trong tương lai. SV trình bày được cách kiểm tra tính chất trên khi hiểu về đồ thị hàm số và sự tương giao với trục hoành.

HD trải nghiệm 3:

Bối cảnh nhiệm vụ:

Sang trang mới

Câu hỏi 1:

- (i) Nêu định nghĩa và tính chất của tiếp tuyến của đường tròn.
- (ii) Sử dụng GeoGebra, cho parabol có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ . Một điểm M bất kỳ thuộc parabol, nối MF và hạ MH vuông góc Δ . Vẽ d là phân giác của góc FMH . Nhận xét gì về số giao điểm của d và parabol khi M thay đổi trên parabol? Hãy đặt tên cho d . Hãy chứng minh d và parabol có duy nhất một điểm chung bằng phương pháp tọa độ.

Câu hỏi 2:

Sử dụng GeoGebra, vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$. Xét $P(1, f(1))$ thuộc (C) , vẽ tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại P .

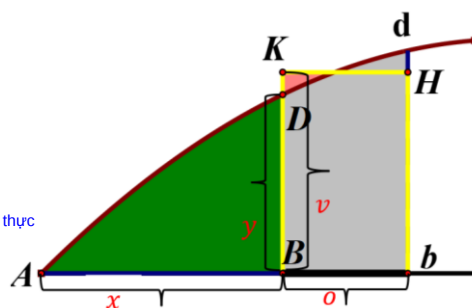
- (i) Theo các bạn, thế nào là tiếp tuyến của đồ thị (C) ? Tiếp tuyến của (C) có thể định nghĩa là đường thẳng chỉ có một điểm chung với (C) như tiếp tuyến của đường tròn hay parabol không?
- (ii) Xét $Q(1+h, f(1+h))$ thuộc (C) , $h \in \mathbb{R}$ bất kỳ. Vẽ cát tuyến PQ của (C) . Tìm biểu thức tính hệ số góc k_{PQ} của cát tuyến PQ theo h . Khai triển và rút gọn k_{PQ} (xem $h \neq 0$) sau đó loại bỏ số hạng còn chứa h (xem $h = 0$) ta được kết quả cuối cùng là k . So sánh k và hệ số góc của tiếp tuyến d .
- (iii) Nhận xét gì cát tuyến PQ và hệ số góc của nó khi Q càng lúc càng gần cho đến khi trùng với P ? Từ đó hãy định nghĩa tiếp tuyến của một đường cong (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại một điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc (C) . Sau đó, nêu cách xác định hệ số góc và phương trình của tiếp tuyến đó.

Bối cảnh dạy học: HD cho phép SV tìm hiểu quá trình đi đến định nghĩa tiếp tuyến của đường cong là đồ thị của một hàm số, tiếp tuyến là giới hạn của một cát tuyến. Quá trình tìm hệ số góc của tiếp tuyến của các nhà toán học đã dẫn đến sự ra đời của khái niệm đạo hàm, giới hạn. Phần mềm GeoGebra cho phép vẽ parabol với tiêu điểm và đường chuẩn; tiếp tuyến của một đường cong; tính toán hệ số góc đường thẳng nên có thể làm tình huống dễ dàng hơn. ~~HD có thể được dùng để dạy học cho HS trong tương lai.~~

HD trải nghiệm 4:

Bối cảnh nhiệm vụ: Quan sát **Hình 3** sau: xét đường cong được vẽ với hoành độ x và tung độ y có diện tích tới điểm $D(x, y)$ là z (z là diện tích hình tô màu xanh). Giả sử có một mối liên hệ nào

đó giữa x và z , tìm y . Newton đã giải quyết như sau^{21,22}: “Giả sử $z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$. Cho hoành độ tăng một moment hay infinitesimal (vô cùng bé), theo James Gregory ta kí hiệu là o . Hoành độ mới là $x + o$ và diện tích tăng thêm (tô màu xám) là $z + o \cdot y = (\frac{n}{m+n})a(x + o)^{\frac{m+n}{n}}$. Dùng định lí nhị thức, sau đó chia cho o , sau đó bỏ đi số hạng vẫn còn chứa o , kết quả là $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Ngược lại nếu đường cong là $y = ax^{\frac{m}{n}}$ thì $z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$.”



Hình 3: Diện tích hình phẳng

- (i) Theo các bạn, trong cách giải quyết của Newton, hình tô màu xanh là hình phẳng giới hạn bởi các đường nào? Khi hoành độ x tăng thêm lượng o (không phải là số 0) thì phần diện tích tăng thêm là diện tích hình phẳng giới hạn bởi những đường nào và vì sao diện tích phần tăng thêm có thể xem là $o \cdot y$?
- (ii) Xét $m = 2n, a = 3$, ta có $z = x^3$. Hãy tìm y theo các bước sau:

Bước 1: Diện tích tam giác cong ABD (hình tô màu xanh) là $z = x^3$, xác định diện tích tam giác cong Abd.

Bước 2: Dựa theo bước 1, viết công thức tính diện tích hình thang cong BbDd (hình tô màu xám) theo x và o , sau đó khai triển và rút gọn.

Bước 3: Tính diện tích hình chữ nhật BbHK. Chọn v sao cho diện tích hình chữ nhật BbHK bằng diện tích hình thang cong BbDd, ta có hệ thức nào?

Bước 4: Chia 2 vế hệ thức cho o , tính v theo x và o .

Bước 5: Nếu giả sử $Bb = o$ được giảm một cách vô hạn tới biến mất, hay o không là gì cả thì v bằng lượng nào và khi đó hãy so sánh v và y . Từ đó y bằng lượng nào?

- (iii) So sánh phương pháp ở mục (ii) và phương pháp tìm cực trị ở HĐ trải nghiệm 1, phương pháp tìm hệ số góc của tiếp tuyến ở HĐ trải nghiệm 3 (câu hỏi 2.iii). Theo các bạn, phương pháp tìm y trên dẫn đến khái niệm nào sau này? Cách tìm diện tích của Newton đưa đến định lý cơ bản của Giải tích, theo các bạn đó là định lý nào?

Bối cảnh dạy học: Bài toán cho phép SV hiểu về cách “tính đạo hàm” của Newton và mối liên hệ với cách tìm cực trị, tìm hệ số góc của tiếp tuyến; về mối liên hệ giữa đạo hàm và tích phân. Giảng viên có thể cho SV tìm hiểu thêm lịch sử khái niệm giới hạn để hiểu hơn về lịch sử các khái niệm cơ bản của Giải tích.

HĐ trải nghiệm 5:

Bối cảnh nhiệm vụ: Một đại lượng y phụ thuộc một đại lượng x , mỗi x xác định duy nhất một y theo công thức $y = f(x)$.

- Hãy nêu tên gọi các lượng sau đây và cho biết ý nghĩa của chúng:

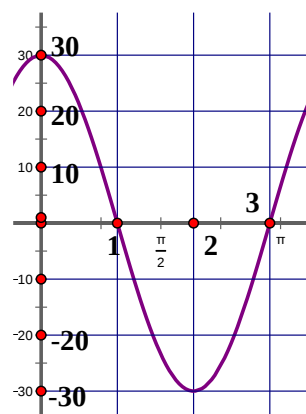
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
- Tìm hiểu định nghĩa và công thức tính các đại lượng sau: tốc độ tức thời, vận tốc tức thời, cường độ dòng điện tức thời; Chi phí cận biên, doanh thu cận biên; tốc độ phản ứng tức thời; tốc độ tăng trưởng tức thời (tốc độ tăng trưởng tuyệt đối) của một quần thể sinh vật.
- Hãy nêu tên gọi ngoài Toán học của đạo hàm của các hàm số sau và giải thích vì sao có các tên gọi như vậy: Hàm hàm vị trí của một vật chuyển động trên đường thẳng $x = f(t)$; Hàm điện lượng $Q = Q(t)$; Hàm tổng chi phí và hàm tổng doanh thu trong sản xuất kinh doanh $TC = TC(x), TR = TR(x)$; hàm nồng độ của chất tạo thành trong phản ứng $[C] = [C](t)$; Hàm số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật $n = f(t)$ (t là thời gian, x là số đơn vị sản phẩm).

Bối cảnh dạy học: Giảng viên cho SV tìm hiểu các khái niệm liên quan đến khái niệm đạo hàm bằng cách nghiên cứu các tài liệu liên quan 23 (tr. 224), 24 (tr. 171, 191) hoặc SGK Toán lớp 12 bộ KN. HĐ có thể tổ chức dưới dạng một dự án học tập nhỏ, sản phẩm là một quyển sách nhỏ về đạo hàm và ứng dụng. Giảng viên có thể giúp SV cách thức tra cứu, dịch thuật tài liệu tiếng Anh.

- HĐ Áp dụng** (Học tập bằng việc đưa vào sử dụng khái niệm đạo hàm)

HĐ áp dụng 1:

Bối cảnh nhiệm vụ: Ta có hình sau biểu diễn đồ thị li độ - thời gian của một vật dao động điều hòa. Biết phương trình li độ của dao động điều hòa là $x = A \cos(\omega t + \varphi)$.



Hình 4: Đồ thị li độ

- Dựa vào đồ thị hãy viết phương trình li độ của dao động.
- Viết phương trình vận tốc và phương trình gia tốc của chuyển động.
- Tính tốc độ cực đại của vật.
- Tính gia tốc của vật tại thời điểm 2s.

Bối cảnh dạy học: Bài toán này dựa trên câu hỏi 2 tr.18 SGK Vật lí 11 bộ KN, nó cho thấy ứng dụng của đạo hàm vào Vật lí. Bối cảnh này có thể đem lại lí do cho việc học đạo hàm của hàm số lượng giác, đạo hàm của hàm hợp, giúp nâng cao năng lực dạy học tích hợp cho SV.

HĐ áp dụng 2:

Bối cảnh nhiệm vụ: Một công ty sản xuất có hàm tổng chi phí $TC = TC(x) = x^2 + 12x + 36$, $x > 0$ là số sản phẩm sản xuất được.

- Tìm hàm chi phí cận biên MC và hàm chi phí trung bình AC .
- Chứng minh rằng $MC < AC$ khi AC giảm; $MC = AC$ khi đường cong AC nằm ngang và $MC > AC$ khi AC tăng.
- Nêu ý nghĩa kinh tế của bài toán.

Bối cảnh dạy học: Với bài toán này, SV sẽ tìm thấy vai trò của đạo hàm trong giải quyết vấn đề tối ưu trong sản xuất. Giảng viên giải thích ý nghĩa hai đại lượng $MC = TC'(x)$; $AC = \frac{TC(x)}{x}$ và việc so sánh chúng, từ đó giúp SV tìm hiểu ý nghĩa kinh tế.

HD áp dụng 3:

Bối cảnh nhiệm vụ: Xét hàm sản xuất ngắn hạn $y = f(x)$ (short-run production function) mô tả mối quan hệ giữa đầu vào x (input) và đầu ra y (output-sản phẩm). x đại diện cho một đầu vào duy nhất biến đổi, các đầu vào khác được giả định là cố định trong ngắn hạn. Hàm sản xuất cho biết cách thức doanh nghiệp sử dụng các yếu tố sản xuất như lao động, vốn, đất đai (đầu vào - x) để tạo ra sản lượng y . Hàm sản phẩm cận biên $MP(x) = f'(x)$ đo lường gia tăng trong sản phẩm đầu ra của quá trình sản xuất khi thêm một đơn vị đầu vào. Dấu của $MP'(x) = f''(x)$ cho biết tính tăng giảm của hàm $MP(x) = f'(x)$ và hàm số $y = f(x)$ là lõm hay lồi. Khi xây dựng các mô hình kinh tế bao gồm sản xuất ngắn hạn, người ta thường giả định hàm sản xuất là lõm ($f''(x) < 0$).

- (i) Hãy cho biết hàm sản xuất ngắn hạn sau là lồi hay lõm:

$$y = f(x) = -x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + 1.$$

- (ii) Hãy nghiên cứu quy luật sản phẩm cận biên giảm dần, quan sát đồ thị hàm số ở câu (i) để giải thích vì sao các hàm sản xuất ngắn hạn thường là lõm.

Bối cảnh dạy học: HD này giúp SV hiểu mối liên hệ giữa hàm lồi, lõm và hàm sản xuất ngắn hạn (xem 24, tr.217) đồng thời thấy được ứng dụng của đạo hàm. Các khái niệm học thuật trong Kinh tế được giải thích đầy đủ trên internet, chẳng hạn trang [vietnambiz](http://vietnambiz.vn) hay ChatGPT. Do đó, giảng viên cần hướng dẫn SV cách tìm kiếm thông tin, đặc biệt là kiểm tra thông tin từ ChatGPT (yêu cầu AI cung cấp nguồn tham khảo của nó).

HD áp dụng 4:

Bối cảnh nhiệm vụ:

- (i) Trong một môi trường sống lí tưởng (đinh dưỡng, miễn dịch đầy đủ, không có kẻ thù, không gian sống rộng rãi,...), số lượng cá thể một quần thể sinh vật tăng trưởng với tốc độ tỉ lệ thuận với số lượng dân số. Gọi $P = P(t)$ là dân số quần thể tại thời điểm t , khi đó tốc độ tăng trưởng tại thời điểm t là $\frac{dP}{dt} = k \cdot P$, $k > 0$ được gọi là hằng số tỉ lệ. Chứng minh rằng hàm số lượng cá thể là $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$, $P_0 = P(0)$ là số lượng cá thể ban đầu (mô hình tăng trưởng mũ).
- (ii) Trong môi trường sống thực tế, sự tăng trưởng với tốc độ $\frac{dP}{dt} = k \cdot P$ chỉ duy trì khi P dưới một ngưỡng M (carrying capacity) nào đó. Nếu $P > M$, P sẽ giảm, tức $\frac{dP}{dt} < 0$, khi

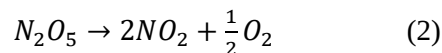
đó tốc độ tăng trưởng tại thời điểm t là $\frac{dP}{dt} = k \cdot P \left(1 - \frac{P}{M}\right)$, $k > 0$. Chứng minh rằng hàm số lượng cá thể là $P(t) = \frac{M}{1 + \frac{M-P_0}{P_0} \cdot e^{-kt}}$, với

$P_0 = P(0)$ là số lượng cá thể ban đầu (mô hình tăng trưởng logistic).

Bối cảnh dạy học: HD này cho thấy đạo hàm được ứng dụng để tính tốc độ tăng trưởng (tuyệt đối) của một quần thể (xem tài liệu 23, tr.586). Ở chiều ngược lại, biết tốc độ tăng trưởng có thể tìm hàm số lượng cá thể. Ở phổ thông, SV đã quen với tăng trưởng theo hàm mũ nên ở HD này, SV có thể tìm hiểu thêm về mô hình logistic được nghiên cứu nhiều trong các ngành khoa học. SV có thể chỉ cần tính đạo hàm để trả lời câu hỏi thay vì giải phương trình vi phân.

HD áp dụng 5:

Bối cảnh nhiệm vụ: Xét phản ứng phân hủy của dinitrogen pentoxide:



Gọi $[N_2O_5] = [N_2O_5](t)$ là nồng độ của N_2O_5 tại thời điểm t (giây)

- (i) Viết công thức tính tốc độ phản ứng tức thời của phản ứng (*).
- (ii) Xác định tốc độ phản ứng theo nồng độ của N_2O_5 và tìm biểu thức của $[N_2O_5](t)$ biết biết phản ứng (*) là phản ứng bậc 1 và hằng số tốc độ phản ứng là $k = 0,0005s^{-1}$; nồng độ ban đầu của N_2O_5 là $C = 0,1M$, với $1M = 1 \text{ mol/L}$.

Bối cảnh dạy học: Giảng viên giúp SV nắm được công thức xác định tốc độ phản ứng bằng cách tìm kiếm theo từ khóa “Động hóa học” (chemical kinetics). SV cũng thấy được cách xác định hàm nồng độ của chất phản ứng và sản phẩm theo tốc độ, đồng thời hiểu được ứng dụng của đạo hàm và tích phân trong các nghiên cứu hóa học. ChatGPT là một lựa chọn tốt để tìm kiếm các thông tin mong muốn kèm các nguồn tài liệu tham khảo đáng tin cậy. SV có thể nghiên cứu thêm ở tài liệu 23, tr. 243. HD này cùng HD áp dụng 4 cho thấy mối liên hệ chặt chẽ giữa đạo hàm và tích phân.

- **HD Chuyển đổi** (Sử dụng kiến thức trong một bối cảnh mới hay một tình huống mới chưa gặp trong lớp học)

HD chuyển đổi 1:

Bối cảnh nhiệm vụ: Trong mặt phẳng Oxy , xét chuyển động ném xiên có phương trình quỹ đạo

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + (\tan \alpha)x \quad (3)$$

- (i) Thế nào là chuyển động ném xiên? Quỹ đạo của chuyển động ném xiên là gì? Giải thích ý nghĩa của g, α, v_0 .
- (ii) Nêu công thức tính độ lớn của vận tốc theo phương ngang v_x và phương thẳng đứng v_y tại thời điểm t .
- (iii) Xác định phương, chiều và độ lớn của vector vận tốc $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ tại thời điểm t của chuyển động. Tính $\tan \beta$ với β là góc tạo bởi phương ngang và phương của $\vec{v}$ theo g, α, v_0, t (là góc lượng giác có tia đầu Ox , tia cuối là phương của $\vec{v}$). $\tan \beta$ cho biết điều gì của chuyển động?
- (iv) $M(x, y)$ là một vị trí của vật trên quỹ đạo tại thời điểm t . Biết x, y là các hàm số biến t , tìm các hàm số đó.
- (v) Trong phương trình (3), y là một hàm số theo biến x , $y = f(x)$. Tính $y'_x = f'(x)$
- (vi) So sánh $\tan \beta$ và $f'(x)$. Kết quả so sánh nói lên điều gì? Xét chuyển động ném xiên với $v_0 = 15m/s, \alpha = 45^\circ$, tiến hành so sánh $\tan \beta$ và y'_x tại hai thời điểm $t = \frac{1}{2}s$ và $t = 2s$ để làm rõ hơn kết luận.
- (vii) Hãy giải thích tại sao từ “**derivative**” trong cụm “derivative of a function f , tức $f'(x)$ ” được dịch là **đạo hàm**.

Bối cảnh dạy học: Giảng viên dùng GeoGebra để vẽ đường quỹ đạo parabol khi $v_0 = 15m/s, \alpha = 45^\circ$. SV có thể tìm hiểu về chuyển động ném xiên ở SGK Vật lí NC, tr.80-81, các video như [Mô phỏng chuyển động ném xiên và đạn đạo - YouTube](#). Giảng viên giúp SV thấy được đạo hàm vừa là độ lớn vận tốc tức thời, vừa là hệ số góc tiếp tuyến, từ đó hiểu vì sao từ “derivative” được dịch là đạo hàm (xem tài liệu 25, tr.132 và ChatGPT)

HD chuyển đổi 2:

Bối cảnh nhiệm vụ: Giả sử $C(x)$ là tổng chi phí một doanh nghiệp phải chịu khi sản xuất x đơn vị sản phẩm. $C = C(x)$ được gọi là hàm chi phí. Biết rằng chi phí cận biên là $C' = C'(x)$. Khi số sản phẩm được sản xuất là n đủ lớn, hãy giải thích tại sao $C'(n) \approx C(n+1) - C(n)$ và nêu ý nghĩa kinh tế của kết quả.

Bối cảnh dạy học: Giảng viên cho SV nghiên cứu nghĩa xấp xỉ của đạo hàm và ứng dụng vi phân trong tính gần đúng (tài liệu 18 và 25 (tr.142-143)), từ đó hiểu được ý nghĩa của bài toán kinh tế: chi phí để sản xuất thêm một đơn vị nữa (đơn vị thứ $n+1$) xấp xỉ bằng chi phí biên của việc sản xuất n đơn vị. Điều này giúp các doanh nghiệp đưa ra quyết định tối ưu về sản xuất và định giá sản phẩm. Từ bài toán này, giảng viên hướng dẫn SV nghiên cứu các khái niệm cận biên khác trong kinh tế.

HD chuyển đổi 3:

Bối cảnh nhiệm vụ: Giải phương trình vi phân

$$mx'' + kx = 0$$

Bối cảnh dạy học: Nghiệm của phương trình $mx'' + kx = 0$ là $x = A \cos(\omega t + \varphi)$. Việc ôn lại cách giải phương trình này cho phép SV hiểu vì sao dao động điều hòa có phương trình như vậy đồng thời thấy được một dấu ấn quan trọng trong giai đoạn “nghiên cứu và phát triển” của khái niệm đạo hàm.

HD chuyển đổi 4:

Bối cảnh nhiệm vụ:

- (i) Hãy nghiên cứu khái niệm đạo hàm ở giai đoạn “nghiên cứu và phát triển” và giai đoạn “định nghĩa” trong lịch sử hình thành khái niệm đạo hàm.
- (ii) Hãy kể tên các nhà toán học đóng góp vào sự tiến triển của khái niệm đạo hàm theo thứ tự thời gian.

Bối cảnh dạy học: Giảng viên yêu cầu SV nghiên cứu các tài liệu 21, 22, 23 để tìm câu trả lời với sự hỗ trợ của trí tuệ nhân tạo. HD này giới thiệu một cách thức học tập cho SV để có thể học tập suốt đời và làm mới những bài dạy của mình nhờ học được sự sáng tạo từ các nhà toán học.

3. KẾT LUẬN

Đề HS tin rằng “Toán học không chỉ là kiến thức hình thức mà còn là những kiến thức có ý nghĩa, giúp giải quyết các vấn đề trong đời sống, khoa học và kỹ thuật”, từ đó có động lực để học tập tốt môn Toán thì cần hình thành ở SV sư phạm Toán niềm tin như vậy. Với niềm tin đó và hiểu biết chuyên môn, các GV tương lai sẽ biết cách xây dựng các nhiệm vụ học tập phù hợp; chọn lựa những phương pháp, kỹ thuật dạy học hợp lý để thiết kế những bài học theo hướng phát triển NL cho HS, qua đó phát triển được NLDH cho bản thân. Bài dạy khái niệm đạo hàm cung cấp cơ sở cho niềm tin đó. Bài dạy cho phép SV trải nghiệm một hành trình lịch sử mà ở đó khái niệm đạo hàm là công cụ giải quyết vấn đề. Các HD học tập giúp

SV ngành
Sư phạm
Toán học

SV hiểu được ứng dụng của khái niệm cũng như thấy được cách thiết kế chúng từ những chất liệu lịch sử và kiến thức liên ngành. Bài báo đã trình bày một minh họa cho tiến trình dạy học một đối tượng tri thức theo CTL bằng cách xét đến bối cảnh tri thức và bối cảnh dạy học thực tế. Việc áp dụng tiến trình này trên đối tượng SV giúp họ hiểu rõ về CTL qua đó giúp nâng cao khả năng sử dụng CTL trong thực hành dạy học sau này. Những nghiên cứu sâu hơn về các NLDH và khả năng phát triển chúng qua việc vận dụng CTL sẽ được chúng tôi tiến hành trong tương lai.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ giáo dục và đào tạo. *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*, Hà Nội, **2018**.
2. R. G. Berns, P. M. Erickson. Contextual Teaching and Learning: Preparing Students for the New Economy, *The Highlight Zone: Research @ Word*, ERIC, **2001**, 5, 1-9.
3. Nguyễn Thị Minh Vân. Phát triển NLDH cho GV toán thông qua việc vận dụng dạy học theo bối cảnh trong xây dựng kế hoạch bài dạy. *Tạp chí khoa học Trường Đại học sư phạm Hà Nội*, **2023**, 68, 123-133.
4. S. J. Sears, S. B. Hersh. Contextual Teaching and Learning: An overview of the project. *Contextual Teaching and Learning: Preparing teachers to enhance student success in the work place and beyond*. Information Series No. 376, ERIC Publications, Washington, DC, 1998.
5. M. L. Crawford. *Teaching Contextually: Research, Rationale, and Techniques for Improving Student Motivation and Achievement in Mathematics and Science*, CORD, CCI Publishing, Inc, Texas, **2001**.
6. N. Maryani, D. B. Widjajanti. Mathematical literacy: How to improve it using contextual teaching and learning method? *Journal of Physics: Conference Series*, **2020**, 1581, 012044.
7. D. Selvianiresa, S. Prabawanto. Contextual Teaching and Learning Approach of Mathematics in Primary Schools, *Journal of Physics: Conference series*, **2017**, 895, 012171.
8. T. Wedege. To know or not to know - Mathematics, that is a question of context, *Educational Studies in Mathematics*, **1999**, 39, 205-227.
9. A. Fordham. The context of teaching and learning in studies of teacher effectiveness, *Studies in Educational Evaluation, Great Britain*, **1982**, 8, 111-128.
10. V. d. M. Heuvel-Panhuizen. The role of context in assessment problems Mathematics, *For the learning of Mathematics*, **2005**, 25, 2-9.
11. H. Borko, R. T. Putnam, The role of context in teacher learning and teacher education, *Contextual Teaching and Learning: Preparing teachers to enhance student success in the work place and beyond*. Information Series No. 376, , ERIC Publications, Washington, DC, 1998.
12. T. T. Giang, M. Q. Khánh. Đào tạo năng lực dạy học cho sinh viên đại học sư phạm theo tiếp cận năng lực thực hiện đáp ứng yêu cầu đổi mới giáo dục phổ thông, *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, **2019**, 22, 34-39.
13. P. T. K. Anh. Khung năng lực dạy học của giáo viên trẻ ở trung học phổ thông theo yêu cầu đổi mới giáo dục. *Tạp chí khoa học Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*, 2020, 65, 64-73.
14. L. T. H. Châu. *Sự cần thiết của phân tích tri thức luận đối với các nghiên cứu về hoạt động dạy học và đào tạo giáo viên*, Hội thảo quốc tế về Didactic Toán lần thứ 6, CIDMath6 2017, Tp Hồ Chí Minh, Việt Nam, 2017.
15. L. T. H. Châu, C. Comiti. *Thuyết nhân học trong Didactic Toán*. NXB Đại học sư phạm Tp Hồ Chí Minh, 2018.
16. L. T. H. Châu. Mô hình hóa trong dạy học khái niệm đạo hàm, *Tạp chí Khoa học Trường ĐHSP Tp Hồ Chí Minh*, **2014**, 65, 5-18.
17. N. M. Đức. Dạy học khái niệm đạo hàm trong mối quan hệ liên môn với Vật lý, *Tạp chí Khoa học Trường ĐHSP Tp Hồ Chí Minh*, **2016**, 85, 41-48.
18. L. T. B. T. Trung, P. H. Trang. Dạy học khái niệm đạo hàm trong mối liên hệ với Kinh tế học, *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Đồng Tháp*, **2017**, 27, 27-34.
19. L. T. B. Liên, T. K. Minh. Kiến thức nội dung sư phạm của GV toán tương lai ở Việt Nam khi dạy học chủ đề đạo hàm, *Tạp chí Khoa học Trường ĐHSP Tp Hồ Chí Minh*, **2020**, 17, 1410-1420.
20. T. D. Hải, Đ. H. Trà. Học qua trải nghiệm: Mô hình đào tạo dạy học tích hợp các môn

- khoa học cho các GV tương lai, *Tạp chí Khoa học ĐHQGHN, Nghiên cứu giáo dục*, **2016**, 32, 27-33.
21. J. V. Grabiner. The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *A historian looks back: The calculus as algebra and selected writings (spectrum)*, Mathematical association of America, 2010.
 22. C. B. Boyer. *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publications, Inc., New York, 1959.
 23. J. Stewart. *Calculus, Early Transcendentals (8th edition)*, CENGAGE Learning, electronic version, 2014.
 24. M. Hoy, J. Livernois, C. McKenna, R. Rees, T. Stengos. *Mathematics for Economics (2nd edition)*, The MIT Press, London, 2001.
 25. T. T. Quang, N. D. V. Nhân, M. T. Tấn, N. N. Q. Thương. *Giải tích – Phép tính vi phân và tích phân*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội, 2020